

10. Exemplarische Folgerungen von Quantenkorrelationen

10.1 Quantentheorie und klassische Physik

Beispiel: Wirkt sich eine Quantisierung beim klassischen Pendel aus?

Wir betrachten ein mathematisches Pendel mit einem masselosen Faden von 25 cm Länge und einer Pendelkugel mit 50 g Masse. Die Kugel wird auf ein Niveau von 5 cm über dem tiefsten Durchlaufpunkt (Auslenkwinkel $\varphi = 0$) ausgelenkt. Sie wird losgelassen, und schwingt.

Nach Gleichung (14) beträgt die Frequenz der Schwingung $\nu = 1/s$ (siehe Beispiel „eine einfache Uhr“). Die Energie der makroskopischen Pendelschwingung ergibt sich aus der anfänglichen Lage-Energie

$$E = m \cdot g \cdot h = 0,05 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,05 \text{ m} = 6,13 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Setzt sich diese Energie aus n Quanten $h \cdot \nu$ zusammen, $E = n \cdot h \cdot \nu$, dann haben wir eine Anzahl von

$$n = E / (h \cdot \nu) = 6,13 \cdot 10^{-3} \text{ J} / (6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 1 \text{ s}^{-1}) = 9,25 \cdot 10^{30} \text{ Quanten.}$$

In der klassischen Physik ist die Wirkung weniger Quanten, mithin der Quantencharakter, verschwindend klein.

10.2 Quantenkorrelationen und ihre zentrale Rolle bei der Bose-Einstein-Kondensation

Einstein wendet Boses Statistik-Ansatz von 1924, der für Photonen gedacht ist, auf ein einatomiges ideales Quantengas an. Im Laufe seiner Analyse stellt er eine Kondensations-Hypothese auf.



Albert Einstein 1879-1955
Satyendra Nath Bose 1894-1974

10.7.1924:

A. Einstein: „Quantentheorie des einatomigen idealen Gases“.

Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Gesamtsitzung, S. 261-267.

29.11.1924:

Brief Einsteins an Paul Ehrenfest in Leiden:

„Von einer gewissen Temperatur an ‚kondensieren‘ die Moleküle ohne Anziehungskraft, d. h. sie häufen sich bei der Geschwindigkeit Null. Die Theorie ist hübsch, aber ob auch etwas Wahres dran ist?“

(Zitiert in [28], S. 440.)

8.1.1925

A. Einstein: „Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung.“ Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse, S. 3-14.

[80] Im folgenden Zitiernummer für Einsteins Paper vom 10.7.1924.

[81] Zitiernummer für Einsteins Paper vom 8.1.1925.

Sitzungsbericht
 Preussische Akademie der Wissenschaften
 8.1.1925

4 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 8. Januar 1925

Was geschieht nun aber, wenn ich bei dieser Temperatur $\frac{n}{V}$ (z. B. durch isothermische Kompression) die Dichte der Substanz noch mehr wachsen lasse?

Ich behaupte, daß in diesem Falle eine mit der Gesamtdichte stets wachsende Zahl von Molekülen in den 1. Quantenzustand (Zustand ohne kinetische Energie) übergeht, während die übrigen Moleküle sich gemäß dem Parameterwert $\lambda = 1$ verteilen. Die Behauptung geht also dahin, daß etwas Ähnliches eintritt wie beim isothermen Komprimieren eines Dampfes über das Sättigungsvolumen. Es tritt eine Scheidung ein; ein Teil »kondensiert«, der Rest bleibt ein »gesättigtes ideales Gas« ($A = 0 \lambda = 1$).

Daß die beiden Teile in der Tat ein thermodynamisches Gleichgewicht bilden, sieht man ein, indem man zeigt, daß die »kondensierte« Substanz und das gesättigte ideale Gas pro Mol dieselbe PLANCKSCHE Funktion $\Phi = S - \frac{\bar{E} + pV}{T}$ haben. Für die »kondensierte« Substanz verschwindet Φ , weil S , E und V einzeln verschwinden¹. Für das »gesättigte Gas« hat man nach (12) und (13) für $A = 0$ zunächst

$$S = -\alpha \sum_s \lg(1 - e^{-\alpha^s}) + \frac{\bar{E}}{T}. \quad (25)$$

Die Summe kann man als Integral schreiben und durch partielle Integration umformen. Man erhält so zunächst

$$\sum_s = - \int_0^\infty s \cdot \frac{e^{-\frac{cs^{\frac{2}{3}}}{\alpha T}}}{1 - e^{-\frac{cs^{\frac{2}{3}}}{\alpha T}}} \cdot \frac{2}{3} \frac{cs^{-\frac{1}{3}}}{\alpha T} ds,$$

Was geschieht nun aber, wenn ich bei dieser Temperatur $\frac{n}{V}$ (z. B. durch isothermische Kompression) die Dichte der Substanz noch mehr wachsen lasse?

Ich behaupte, dass in diesem Falle eine mit der Gesamtdichte stets wachsende Zahl von Molekülen in den 1. Quantenzustand (Zustand ohne kinetische Energie) übergeht, während die übrigen Moleküle sich gemäß dem Parameterwert $\lambda = 1$ verteilen. Die Behauptung geht also dahin, dass etwas Ähnliches eintritt wie beim isothermen Komprimieren eines Dampfes über das Sättigungsvolumen. Es tritt eine Scheidung ein; ein Teil »kondensiert«, der Rest bleibt ein »gesättigtes ideales Gas« ($A = 0 \lambda = 1$).

Die beiden Teile in der Tat ein thermodynamisches Gleichgewicht bilden, sieht man ein, indem man zeigt, dass Φ für die »kondensierte« Substanz verschwindet und das »gesättigte ideale Gas« dieselbe Funktion $\Phi = S - \frac{\bar{E} + pV}{T}$ haben. Für die »kondensierte« Substanz verschwindet Φ , weil S , E und V einzeln verschwinden. Für das »gesättigte Gas« hat man nach (12) zunächst

$$S = -\alpha \sum_s \lg(1 - e^{-\alpha^s}) + \frac{\bar{E}}{T} \dots (25)$$

Man als Integral schreiben und durch partielle Integration umformen. Man erhält so zunächst

$$-\int_0^\infty s \cdot \frac{e^{-\frac{cs^{\frac{2}{3}}}{\alpha T}}}{1 - e^{-\frac{cs^{\frac{2}{3}}}{\alpha T}}} \cdot \frac{2}{3} \frac{cs^{-\frac{1}{3}}}{\alpha T} ds,$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^\infty s^{\frac{2}{3}} ds = -\frac{2}{3} \frac{\bar{E}}{\alpha T} = -\frac{pV}{\alpha T} \dots (26)$$

folgt also für das »gesättigte ideale Gas«

$$\Phi = \frac{\bar{E} + pV}{T}$$

Die Konsistenz des gesättigten idealen Gases mit der kondensierten Substanz ist evident.

$$\Phi = 0 \dots (27)$$

Der »kondensierte« Teil der Substanz beansprucht keine besondere Wärme, d. h. nicht.

Im August 2005 hatte ein Student (Rowdy Boeyink) im Lorentz-Institut der Universität Leiden das Einstein-Manuskript „Quantentheorie des einatomigen Gases, Zweite Abhandlung“ von Dezember 1924 gefunden. Einstein hatte dieses handschriftliche Manuskript offensichtlich zur Korrektur der Druckfahnen des Artikels benutzt und bei seinem Freund Ehrenfest zurückgelassen, den er besucht hatte.

www.Lorentz.leidenuniv.nl/history/Einstein_archive/Einstein_1925_manuscript/
news.bbc.co.uk/2/hi/europe/4170212.stm, from August 21, 2005, 00:30 GMT

Ideales Gas bedeutet, dass eine Wechselwirkung zwischen den Gasmolekülen ausgeschlossen wird. In einem klassischen idealen Gas kann es keinen Phasenübergang geben. Demgegenüber ist in einem Gas, in dem zwischen den Molekülen eine Anziehungskraft wirkt, ein Phasenübergang möglich.

Ein Beispiel dafür ist **Wasserdampf**.

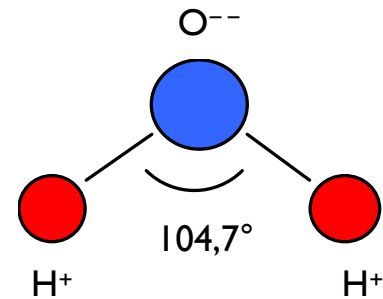
Die elektrisch polaren Wassermoleküle üben wechselseitig eine Anziehungskraft aufeinander aus. Es bilden sich Molekülketten.

Ist die Wärmebewegung sehr stark, reißen die Ketten auf und die Moleküle bewegen sich einzeln: Das Wasser befindet sich in der Dampfphase.

Nimmt die Wärmebewegung ab, kommt es zur Kettenbildung, der Wasserdampf kondensiert. Wasser liegt jetzt auch in der flüssigen Phase vor.

Kondensieren und Verdampfen ergeben sich aus dem Zusammenspiel der Dipol-Korrelationen der Wassermoleküle und der Wärmebewegung.

Der Winkel bei der
(näherungsweise klassisch vorgestellten)
Bindung zwischen dem Sauerstoff-Atom O
und den Wasserstoffatomen H macht das
Wasserstoffatom zu einem
elektrischen Dipol.



Abstand O – H: 0,096 nm

Abstand H – H: 0,152 nm

Das Sauerstoffatom zieht die Elektronen der Wasserstoffatome zu sich herüber, um eine Edelgaskonfiguration anzustreben.

Auch in einem idealen Quantengas werden zwischen den Gasteilchen klassische Kräfte wie Gravitation, elektromagnetische Kräfte oder daraus abgeleitete Kräfte ausgeschlossen.

Doch tritt hier mit den Quantenkorrelationen eine völlig neue Qualität auf. In einem Bose-Gas sind diese Korrelationen zwischen den Gasteilchen anziehend.

Die Bose-Einstein-Kondensation ergibt sich aus dem Wechselspiel von Quantenkorrelationen und Wärmebewegung.

Da Quantenkorrelationen extrem schwach sind, tritt Kondensation erst bei äußerst geringer Wärmebewegung auf, also bei extrem tiefen Temperaturen.

Neben der **Bose-Statistik** (sie gilt für Teilchen mit ganzzahligem Spin, in Einheiten von $h/2\pi$) gibt es noch eine weitere Quantenstatistik, die **Fermi-Dirac-Statistik** (sie gilt für Teilchen mit halbzahligem Spin). Die Fermi-Dirac-Statistik war bei der Veröffentlichung von Einsteins Paper [81] Anfang Januar 1925 noch nicht bekannt ist. Anders als beim idealen Bose-Gas gibt es im idealen Fermi-Gas keinen Phasenübergang.

Der Begriff der Quantenkorrelationen tauchte 1924 noch nicht explizit auf. Er ist aber im Begriff der Quantenstatistik grundsätzlich enthalten. Erst 1935 beschäftigt sich Einstein in einer kritischen Analyse zur Quantenmechanik mit Quantenkorrelationen ganz prinzipiell und macht auf ihre kontra-intuitiven Folgen aufmerksam [53].

Quantenkorrelationen im einatomigen idealen Bose-Gas (Einstein-Fall):

maximale mittlere Teilchendichte: $\rho_e(T) = \left(\frac{2m kT}{\hbar^2 4\pi} \right)^{3/2} \cdot 2,61238$

maximale mittlere Energiedichte: $u_e(T) = \frac{3}{2} kT \left(\frac{2m kT}{\hbar^2 4\pi} \right)^{3/2} \cdot 1,34149$

mittlere Energie pro Atom: $u_e(T)/\rho_e(T) = \frac{3}{2} kT \cdot 0,51351$

Die Zahlenwerte geben die Quantenabweichung gegenüber dem klassischen Fall an.
(Im klassischen Fall würde anstelle der Kommazahlen jeweils eine 1 stehen).

In der oberen Gleichung ist es der Zahlenwert der Riemannsches Zeta-Funktion an der Stelle $3/2$.

In der mittleren Gleichung ist es der Wert der Riemannsches Zeta-Funktion an der Stelle $5/2$.

Gewissermaßen summiert die Riemannsches Zeta-Funktion über alle im Gas vorkommenden Quantenkorrelationen. Diese Formeln sind in Einsteins Paper vom 10.7.1924 enthalten [80].

Quantenkorrelationen im relativistischen idealen 1-Teilchen Bose-Gas:

maximale mittlere Teilchendichte: $\rho_e(T) = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \cdot 1,20206$

maximale mittlere Energiedichte: $u_e(T) = 3 kT \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \cdot 1,082323$

mittlere Energie pro Teilchen: $u_e(T)/\rho_e(T) = 3 kT \cdot 0,90039$

Diese Zahlenwerte geben wieder die Quantenabweichung gegenüber dem klassischen Fall an. Sie unterscheiden sich deutlich von den entsprechenden nicht-relativistischen Werten. In der oberen Gleichung ist es der Zahlenwert der Riemannschen Zeta-Funktion an der Stelle 3. In der mittleren Gleichung ist es der Wert der Riemannschen Zeta-Funktion an der Stelle 4.

Nebenbemerkung

Riemannsche Zeta-Funktion:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \\ &= \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^s}) \cdot \dots}\end{aligned}$$

Der Laufparameter p beim unendlichen Produkt durchläuft alle Primzahlen, gewissermaßen die „mathematischen Atome“.

Die bis heute ungelöste Riemannsche Vermutung von 1859:

Alle nichttrivialen Nullstellen der komplexen Zeta-Funktion liegen auf der Geraden mit $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Diskussion um die Bose-Einstein-Kondensation

1926 erhob George Eugene Uhlenbeck (1900-1988) einen gravierenden Einwand gegen die Möglichkeit einer Bose-Einstein-Kondensation: Die Quantisierung der Translationsbewegung lässt in einem endlich großen Behälter nur diskrete Energiezustände zu. Sie sind Eigenwerte des Laplace-Operators für dieses endliche Gebiet. Damit ist insbesondere der Grundzustand von den angeregten Zuständen separiert. Der für die Kondensation wesentliche Übergang der Gasteilchen in den Grundzustand scheint damit gar nicht möglich zu sein [82].

Uhlenbecks Einwand gegen Einsteins Kondensationshypothese lässt sich mit Hilfe des sogenannten thermodynamischen Limes entkräften, einer mathematischen Idealisierung, bei der das Volumen des Systems gegen Unendlich strebt, wobei die intensiven Größen (Energiedichte, Druck, Teilchendichte, ...) endlich gehalten werden. In dieser Idealisierung werden volumenrelevante Aspekte (Bulk-Eigenschaften) eines endlich großen Systems identifizierbar. Im thermodynamischen Limes rücken die Energiezustände des Systems infinitesimal eng zusammen. Dann wird auch der Übergang in den Grundzustand denkbar.

Im thermodynamischen Limes wird das Spektrum des Energie-Operators und des modularen Operators kontinuierlich. Diese Kontinuität ist kompatibel mit der Endlichkeit des Planckschen Wirkungsquantums, die Einsteins Lichtquantenhypothese unterstützt. - Im Limes bleibt das Quantensystem nicht-kommutativ.

Eine historische Anmerkung

Die Notwendigkeit des thermodynamischen Limes wurde in einer Diskussion während einer internationalen Konferenz anlässlich des 100. Geburtstags von van der Waals im November 1937 in Amsterdam thematisiert, die von Hendrik A. Kramers geleitet wurde ([28], S. 441). Eine Hälfte der Diskussionsteilnehmer sah darin eine Rechtfertigung von Einsteins Kondensationshypothese, die andere Hälfte nicht. Doch zog Uhlenbeck daraufhin seinen Einwand zurück [84].

1938 deutete Fritz London das Phänomen der bis dato theoretisch unverstandenen Suprafluidität von Helium mit Hilfe der Bose-Einstein-Kondensation [85]. Für die kritische Temperatur von He^4 ergab sich aus der Theorie ein Wert von 3,13 K, während der experimentell beobachtete Wert bei 2,19 K liegt. Diese Abweichung lässt sich durch die nicht perfekte Idealität des Heliumgases begründen.

[82] G. E. Uhlenbeck, Thesis. Leiden, 1927. Zitiert in [81].

[83] John T. Lewis: "Why do Bosons Condense?" DIAS-STP-86-12. Dublin Institute for Advanced Studies, School of Theoretical Physics, 1986.

[84] B. Kahn, G. E. Uhlenbeck: "On the theory of condensation". Physica 5, 1938, S. 399-415.

[85] Fritz London, Nature 141, 1938, S. 643. Physical Review 54, 1938, S.947.

Auch die Supraleitung wurde als eine Bose-Einstein-Kondensation erklärt [86]. Elektronen gehorchen der Fermi-Dirac-Statistik, so dass sie nicht kondensieren können. In Festkörpern können sie jedoch Paare bilden. Und für Elektronenpaare gilt die Bose-Statistik, so dass es unter geeigneten Bedingungen zu einer Bose-Einstein-Kondensation kommen kann. Mit der Folge, dass der elektrische Widerstand verschwindet.

R. Graham und F. Haake haben 1968 den Laser als eine Bose-Einstein-Kondensation von Photonen erklären können [87].

In der Physics Community haben sich für alle drei Phänomene alternative theoretische Erklärungen etabliert: Bei der Suprafluidität die Landau-Theorie, bei der Supraleitung die Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie, und beim Laser der theoretische Zugang durch Hermann Haken.

[86] M. R. Schafroth, *Physical Review* 96, 1954, S. 1149, S. 1442. *Physical Review* 100, 1955, S. 463.
M. R. Schafroth, S. T. Butler, J. M. Blatt, *Helvetica Physica Acta* 30, 1957, S. 93.
John Blatt: "Theory of Superconductivity," Academic Press, New York, 1964.

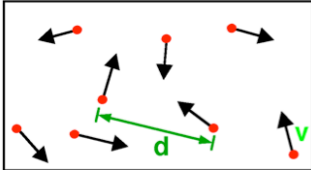
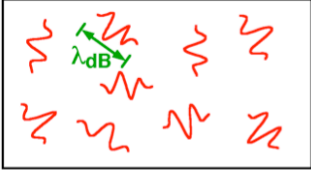
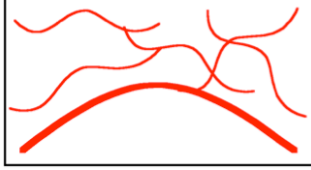
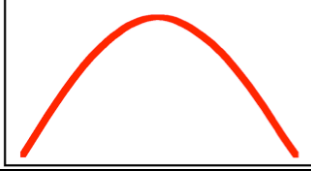
[87] R. Graham, F. Haake, *Zeitschrift für Physik* 211, 1968, S. 411.

Nach 70 Jahren experimenteller Nachweis

1995: Erste **Experimentelle Realisierung** der Bose-Einstein-Kondensation in einem ultrakalten Gas von Rubidium-Atomen. National Institute of Standards and Technology (NIST), University of Boulder, Colorado.

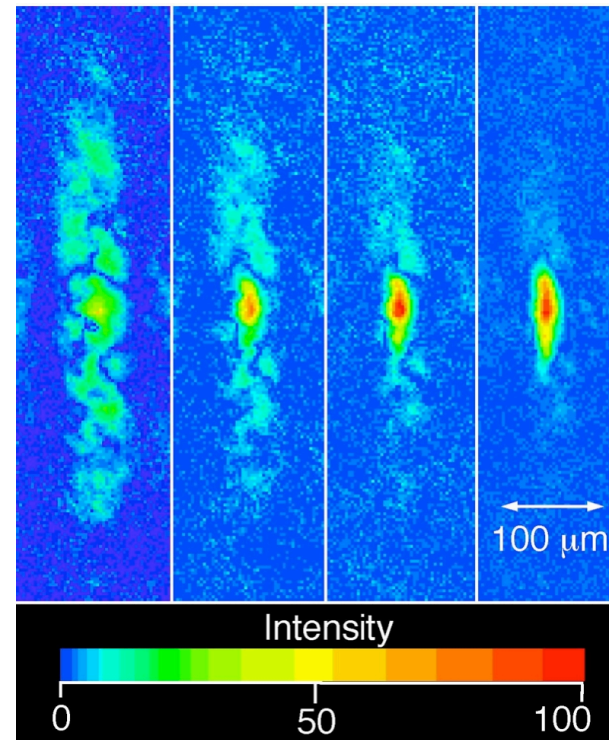
M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell:
“Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”.
Science 269, S. 198-201, Juli 1995.

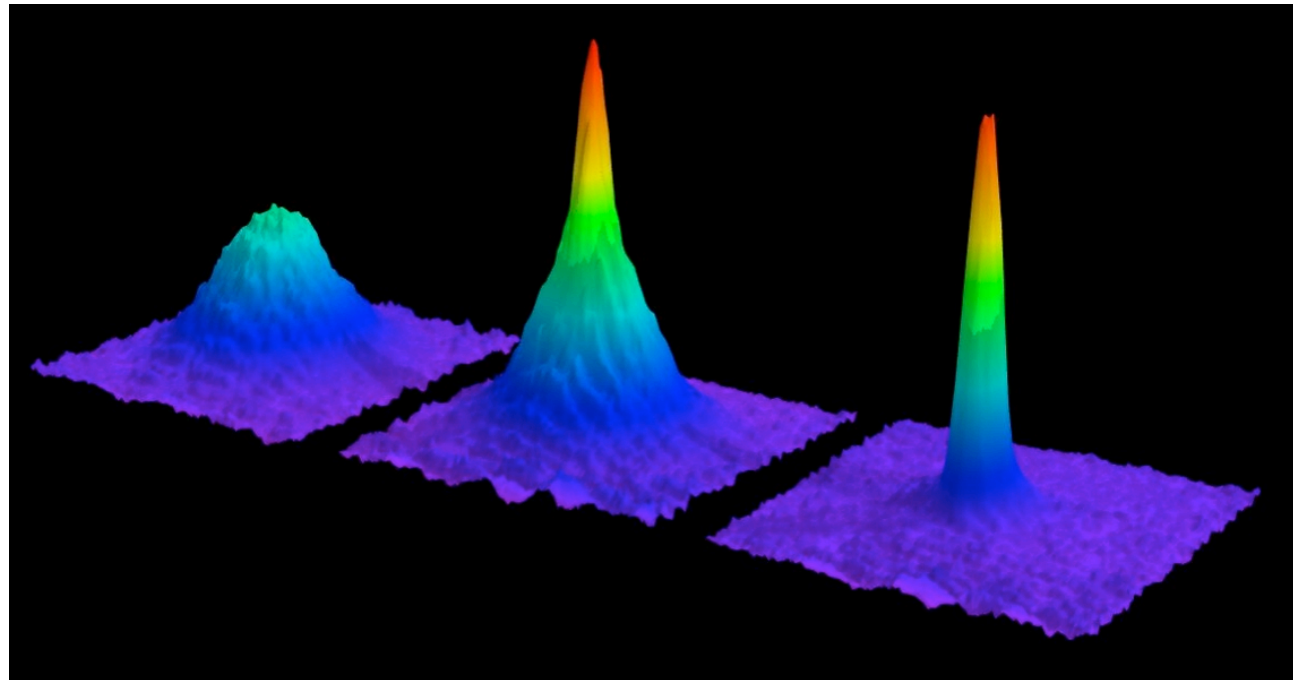
What is Bose-Einstein

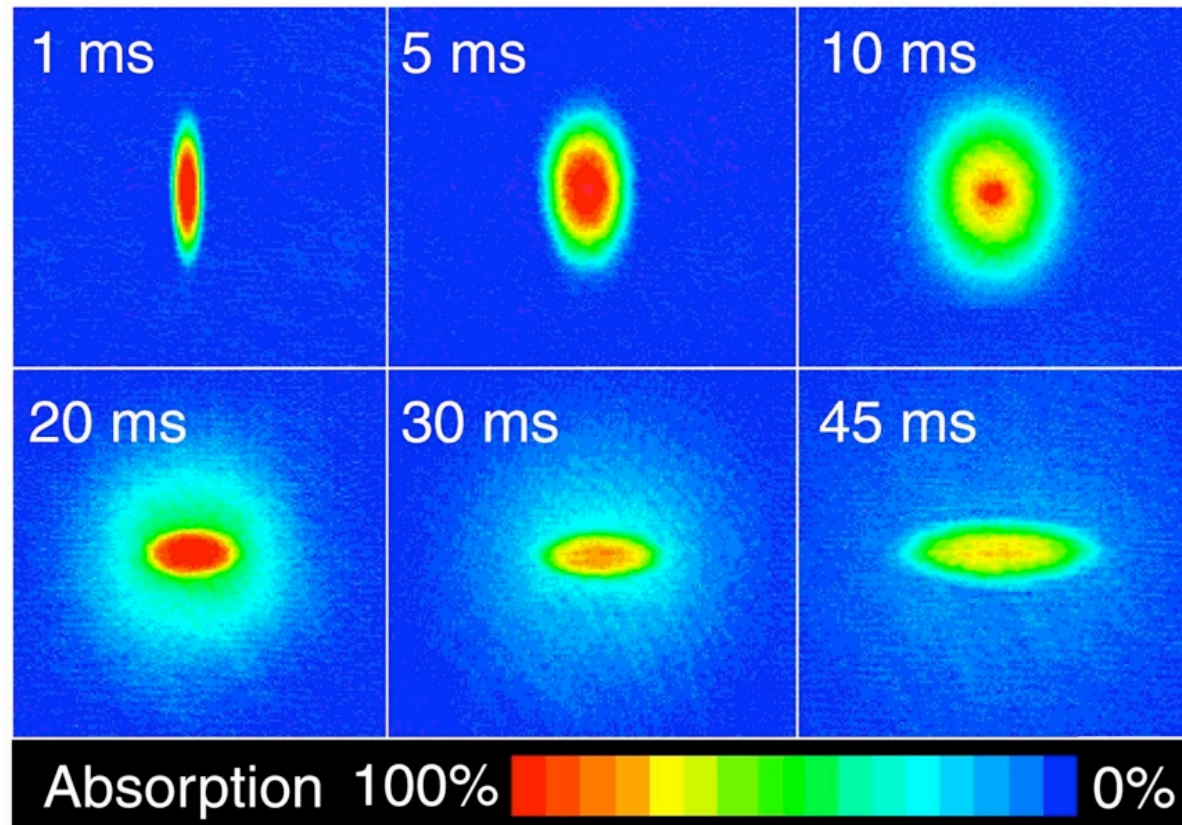
	High Temperature T: thermal velocity v density d^{-3} "Billiard balls"
	Low Temperature T: De Broglie wavelength $\lambda_{dB} = h/mv \propto T^{-1/2}$ "Wave packets"
	T = T_{crit}: Bose-Einstein Condensation $\lambda_{dB} \approx d$ "Matter wave overlap"
	T = 0: Pure Bose condensate "Giant matter wave"

http://cua.mit.edu/ketterle_group/ketterle.htm

Ein Bose-Einstein-Kondensat entwickelt sich







Frei existierendes Bose-Einstein-Kondensat

10.3 Photonenkondensation (*Ein fachphysikalischer, aber aufregender Exkurs! Für Spezialisten.*)

Photonen sind kein materieller Stoff. Freie Photonen bewegen sich immer mit Lichtgeschwindigkeit. Das gilt auch für die Photonen der Wärmestrahlung in einem elektromagnetischen Resonator. Sie werden, wie in einem Spiegelkabinett, an den Wänden hin und her reflektiert, sie bilden stehende Wellen.

Photonen haben Ruhemasse 0 und Spin (Helizität) 1. Für Photonen gilt die Bose-Statistik. Ist damit in einem idealen Photonengas eine Bose-Einstein-Kondensation möglich [88]? Dem steht ein konzeptionelles Problem entgegen. Nach Einstein bedeutet Bosonen-Kondensation, dass ein Anteil der Bosonen in den Zustand mit kinetischer Energie Null übergeht und so den tiefsten Energiezustand makroskopisch besetzt. Photonen, die keine Bewegungsenergie mehr haben, sind aber nicht vorstellbar. Ein ruhendes Photon müsste die Masse 0, und damit auch die Energie 0 haben. Damit wäre es nicht vorhanden. So scheint es, dass in einem idealen Photonengas ein Kondensat gar nicht existieren kann.

Zu diesem konzeptionellen Problem kommt noch ein mehr als formales Hindernis dazu: Die Plancksche Strahlungsformel beschreibt ein Photonengas im kanonischen Wärmegleichgewicht. Ein kanonisches Wärmegleichgewicht lässt nur eine einzige freie Variable zu. Auch das schließt eine Bose-Einstein-Kondensation aus.

[88] In einem Laser werden die Photonen „gepumpt“ und bilden kein ideales Quantengas. Nichtsdestotrotz lässt sich der Laser-Mechanismus als eine Bose-Einstein-Kondensation verstehen [87].

Eine mögliche Bose-Einstein-Kondensation in einem idealen Quantengas setzt ein großkanonisches Ensemble mit mindestens zwei frei einstellbaren Variablen voraus. Ein großkanonisches Ensemble mit unbestimmter Teilchenzahl ist mathematisch und physikalisch durchaus plausibel und "handwerklich" beherrschbar [89]. Ein Photonengas als großkanonisches Ensemble zu qualifizieren, setzt allerdings eine experimentell realisierbare Abweichung vom Planckschen Wärmegleichgewicht voraus.

Eine solche Abweichung vom Planckschen Wärmegleichgewicht eines Photonengases in einem elektromagnetischen Resonator lässt sich durch einen Photonenstrom erzeugen, der ein stationäres Fließgleichgewicht annimmt. Ein Photonenstrom mit geeignetem Frequenzspektrum und einer passend eingestellten Leistung wird in den Resonator eingestrahlt. Gleichzeitig wird die Wandtemperatur des Resonators auf einen geeigneten Wert gebracht, ggf. durch aktive Kühlung. Damit lassen sich die mittlere Energiedichte des Photonengases und die Temperatur, die es annimmt, fixieren. Es liegt eine Art Photonenstau vor. Die Mittelwerte zweier unabhängiger Variablen des Photonengases sind damit frei einstellbar. Die Voraussetzungen für ein großkanonisches ideales Bosonengas mit unbestimmter Teilchenzahl liegen vor.

[89] Einstein setzt bei seinem Kondensationsvorschlag ein Quantenensemble mit fester Teilchenzahl voraus.

Im folgenden erläutere ich ein subtiles mathematisches Detail, das für die Photonenkondensation entscheidend ist. Ein Photonengas in einem endlich großen Resonator hat einen tiefsten Energiezustand mit $E_1 > 0$. Für das chemische Potential μ^* , welches die stoffliche Qualität der Gas-Konstituenten energetisch charakterisiert, ist ein Wertebereich $\mu^* \leq E_1$ physikalisch plausibel. Doch empfiehlt es sich, aus formalen Gründen zu einem renormierten chemischen Potential μ überzugehen, das ausschließlich negative Werte annimmt und ggf. gegen den Grenzwert 0 strebt:

$$\mu = \mu^* - E_1 \leq 0$$

Die Energiedichte $u(T, \mu)$ eines dreidimensionalen großkanonischen Photonengases der Temperatur T mit einem renormierten chemischen Potential $\mu \leq 0$ in einem Volumen V ergibt sich wie folgt:

$$(45) \quad u(T, \mu) = V^{-1} E_1 / (\exp(-\mu/kT) - 1) + 3kT \cdot 16\pi (hc/kT)^{-3} g_4(\exp(-\mu/kT))$$

\exp ist die Exponentialfunktion. Der zweite Summand der rechten Seite der Gleichung sind die Beiträge der angeregten Zustände des Photonengases; die Idealisierung eines unendlich großen Volumens ist hier bereits vorweggenommen. Dieser zweite Summand der rechten Seite in (45) wird für $\mu = 0$ maximal [90]. Dabei ist $g_1(1) = \zeta$ die Riemannsche Zetafunktion und $g_4(1) = \zeta(4)$. Dieser Zetafunktionswert lässt sich numerisch explizit angeben:

$$g_4(1) = \pi^4/90$$

Der Summand mit $g_4(l)$ ist die Energiedichte der schwarzen Strahlung, der Wärmestrahlung. Gleichzeitig wird er zur kritischen Größe für die Photonenkondensation:

$$u_{\text{krit}}(T, 0) = 3kT \cdot 16\pi (hc/kT)^{-3} g_4(l)$$

Wenn die Energiedichte des Photonengases, die sich auf einen Wert u frei einstellen lässt, über den Wert $u_{\text{krit}}(T, 0)$ steigt, also

$$u(T, \mu) = u > u_{\text{krit}}(T, 0),$$

dann haben Photonen, die den Überschuss über die kritische Energiedichte bilden, keinen Platz mehr in der Gasphase. Dann steht ihnen nur der erste Summand auf der rechten Seite der Gleichung (45) zur Verfügung, der die Besetzung des Grundzustands des Photonenresonators angibt.

$$[90] \quad g_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

Eine Umformung des Nenners des ersten Summanden auf der rechten Seite von (45) macht dies explizit. Wir entwickeln die Exponentialfunktion. Die höheren Potenzen von μ werden im Grenzübergang, auf den wir zugehen, keine Rolle spielen.

$$\begin{aligned} u(T, \mu) &= V^{-1} E_1 / (\exp(-\mu/kT) - 1) + u_{\text{krit}}(T, 0) \\ &= V^{-1} E_1 / (1 - (\mu/kT) + \dots - 1) + u_{\text{krit}}(T, 0) \\ &\approx V^{-1} E_1 / (-\mu kT) + u_{\text{krit}}(T, 0) \end{aligned}$$

Die den kritischen Wert übersteigende Exzessenergie des Photonengases wird das Verhalten des chemischen Potentials μ bestimmen. Die Temperatur sei fest eingestellt.

$$\underline{u} - u_{\text{krit}}(T, 0) \approx -\mu^{-1} V^{-1} E_1 \cdot (kT)^{-1}$$

Die Idealisierung eines Grenzübergangs zu einem unendlich großen Resonator soll sicherstellen, dass der Phasenübergang des Photonengases nicht von Merkmalen endlich großer, konkreter Resonatoren abhängt. Sei L eine typische Länge, die die Größe des Resonators charakterisiert (z. B. ein Durchmesser, oder eine Kantenlänge). Dann ist das Volumen proportional zu L^3 . Der Energiewert E_1 ist proportional zu L^{-1} . Beim mathematischen Limes $L \rightarrow \infty$ muss der Ausdruck $\mu^{-1} V^{-1} E_1$ den gewünschten endlich großen Wert annehmen. Damit strebt das chemische Potential μ derart gegen Null, wie $V^{-1} E_1$ gegen Null strebt:

$$\mu^{-1} V^{-1} E_1 = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad \mu \sim L^{-4}$$

Im Limes ist das chemische Potential eines überkritischen Photonengases Null. Die Energiedichte \underline{u} des überkritischen Photonengases setzt sich aus der Energiedichte $u_{\text{krit}}(T, 0)$ der Gasphase und der makroskopischen Besetzung u_1 des Grundzustands, der Kondensatphase, zusammen:

$$\underline{u} = u_1 + u_{\text{krit}}(T, 0).$$

Das mathematisch Subtile am Unendlich-Volumen-Limes liegt am Unterschied zwischen gleichmäßiger Stetigkeit und punktwiser Stetigkeit der thermodynamischen Funktionen im kritischen Bereich. Für ein überkritisches Photonengas gilt die gleichmäßige Konvergenz des Unendlich-Volumen-Limes für die Energiedichtefunktion nicht. Dieser Fall wird in der einschlägigen Literatur übergangen. Zu einer vollständigen mathematischen Ableitung sei auf [91] hingewiesen.

Die vorstehende Ableitung erläutert den Beweis der Möglichkeit einer Bose-Einstein-Kondensation in einem großkanonischen Photonengas. Sobald die Energiedichte den kritischen Wert übersteigt, wird der Grundzustand des Resonators spontan besetzt. Das ist eine makroskopische Besetzung des Grundzustands, ähnlich wie beim Laser. Allerdings mit einem Unterschied: Beim Laser werden laseraktive Moleküle gepumpt. Der Grundzustand der Laserphotonen ist energetisch strikt positiv. Mit diesem Grundzustand korrespondiert ein strikt positives chemisches Potential, $\mu > 0$ [92]. Dagegen ist bei der Bose-Einstein-Kondensation in einem idealen großkanonischen Photonengas das chemische Potential $\mu = 0$.

- [91] Eberhard E. Müller: "Bose-Einstein Condensation in Dependence of the Mean Energy Density". *Annals of Physics* 184 (1988), S.219-230. (Vollständigkeitshalber eine Korrektur: Gleichungen (27) und (40) in [89] müssen lauten: $\lim_{R \rightarrow \infty} s^R(\beta, \mu_R(\beta, \underline{u})) = \frac{4}{3} k\beta u_e(\beta, \mu(\beta, \underline{u}))$, für $R \rightarrow \infty$. Das Kondensat trägt nicht zur Entropiedichte bei.)
- [92] P.T. Landsberg: "Photons at non-zero chemical potential". *Journal of Physics C* 14 (1981), L1025-L1027.
Eckehard Schöll, Peter T. Landsberg: "Nonequilibrium kinetics of coupled photons and electrons in two-level systems of laser type. *Journal of the Optical Society of America* 73 (1983), S. 1197 ff.

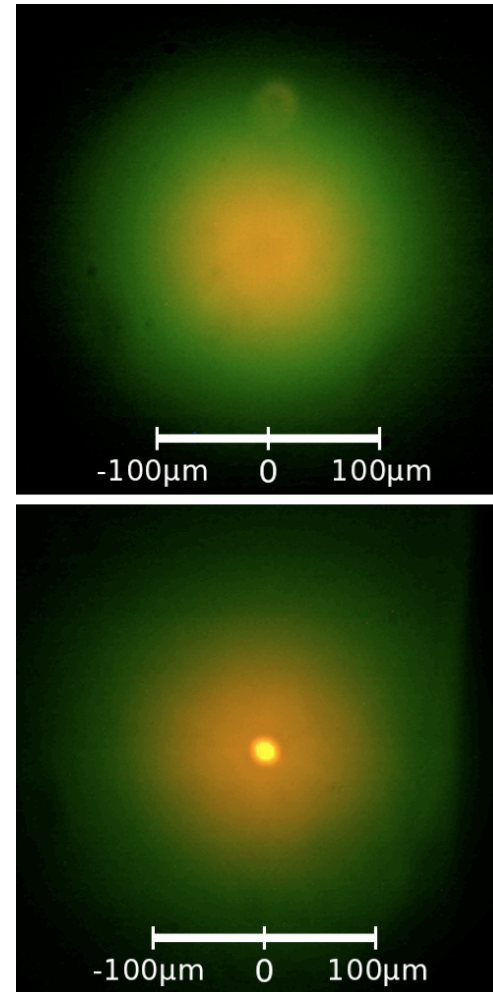
Der Forschungsgruppe um Martin Weitz am Physik-Institut der Universität Bonn ist 2010 eine Bose-Einstein-Kondensation von Photonen in einem optischen Mikroresonator gelungen [93]. In ihrem Experiment ist das Photonenkondensat sichtbar. Die Echtfarbenphotografie hier wurde u. a. in [94] publiziert (siehe auch [95]).

Das obere Bild zeigt das approximativ zweidimensionale Photonengas mit unterkritischer Photonenenergiedichte. Das untere Bild zeigt das System nach Überschreiten der kritischen Energiedichte-Schwelle. Der helle gelbe Fleck ist das Photonenkondensat. Die Farbe entspricht in diesem Experiment dem tiefsten erreichbaren Energiezustand des benutzten optischen Resonators.

[93] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, M. Weitz: "Bose-Einstein Condensation of Photons in an optical microcavity". Nature 468 (2010), S. 545.

[94] Jan Klaers, Julian Schmitt, Tobias Damm, David Dung, Frank Vewinger und Martin Weitz: „Bose-Einstein-Kondensation von Photonen in einem optischen Mikroresonator“. In „Raum und Materie“, Proceedings zum Symposium des Promotionsschwerpunkts „Wechselwirkungen“ des Evangelischen Studienwerks Villigst (15.-18. Oktober 2012), Hg. Eberhard Müller, LIT Verlag, Berlin, 2015.

[95] Heinz Horeis: „Ein Tropfen Licht“, bild der wissenschaft 6/2011, S. 36-41.



Ein Tropfen Licht

Bonner Physiker lassen Photonen kondensieren

Wäre Martin Weitz ein Gelehrter im Märchen, er könnte Licht zu zauberhaften Stoffen weben und damit Prinzessinnen einkleiden. Im wirklichen Leben hat der Physikprofessor der Universität Bonn mit seinem Team es immerhin geschafft, dass Mitglieder seiner eigenen Zunft staunen: Er hat Lichtteilchen, sogenannte Photonen, zu einem Knäuel verdichtet und in einem sogenannten Bose-Einstein-Kondensat vereinigt.

Für diesen Zustand der Materie gab es 2001 einen Nobelpreis. Physiker hatten es geschafft, Gasatome so stark zu kühlen und so dicht zusammenzupferchen, dass sie ihre Individualität aufgeben und sich wie ein einziges großes Atom verhalten. Im Prinzip, dachten sich die Physiker, müsste das auch mit Lichtteilchen möglich sein, denn sie teilen die für eine völlige Vereinigung entscheidende Eigenschaft der Atome: Photonen sind als sogenannte Bosonen gesellig genug, ihre Individualität aufzugeben. Photonen lassen sich jedoch nicht abkühlen. Dazu müsste man sie bremsen, und wer das versucht, vernichtet sie. Lichtteilchen können nur bei Lichtgeschwindigkeit bestehen.

Die Bonner Physiker brauchten also einen Trick. Sie haben sich eine winzige, verspiegelte Kammer gebaut, die sie mit einem Farbstoff füllten. Diesen beleuch-

teten sie mit einem Laser, so dass der Farbstoff Photonen von Gelb über Grün bis Blau ausstrahlte. In der speziellen Geometrie der Kammer konnte sich ein einziger Farbton am besten ausbreiten, eine Art Sonnengelb. Alle Lichtteilchen mit höherer Energie (also grünem und blauem Licht) mussten nach Kollisionen mit den Spiegeln und dem Farbstoff auf die Randbereiche ausweichen.

Nach den Regeln der Quantenphysik ähnelt diese Auslese im Zentrum einem Abkühlen, auch wenn die ganze Apparatur bei Zimmertemperatur blieb. So sammelten sich die „gekühlten“ Photonen in der Mitte der Apparatur. Sie flogen relativ ungestört hin und her und als ihre Zahl etwa 63 000 erreichte, veränderte sich der Zustand: Die Lichtteilchen vollführten den erhofften Zusammenschluss (*Nature*, Bd. 468, S. 545, 2010). Auf einem Foto der Kammer bildete sich ein intensiver gelber Punkt in einer grünen Wolke. Dort hatten die Photonen ihre Individualität aufgegeben.

Das konzentrierte gelbe Licht war zudem rein und kohärent wie das eines Lasers. Die Physiker um Martin Weitz hoffen daher, dass sich nach dem Prinzip ihres Experiments Lichtquellen für kurzwellige Strahlen konstruieren lassen, was Laser bisher nur mit viel Aufwand schaffen. CHRISTOPHER SCHRADER

Eine Bose-Einstein-Kondensation eines idealen großkanonischen Photonengases ist nicht nur in einem 3-dimensionalen Resonator möglich, sondern auch in einem 2-dimensionalen, was hier experimentell demonstriert wird. Die kritische Energiedichte ist dann die Energiedichte der schwarzen Strahlung eines 2-dimensionalen Resonators, die sich vom 3-dimensionalen Fall unterscheidet. Für ein nichtrelativistisches ideales Bosonengas ist eine Bose-Einstein-Kondensation in einem 2-dimensionalen Resonator ausgeschlossen. Im 3-dimensionalen Fall ist sie bekanntermaßen möglich. Siehe dazu [83, 91].

Im Grundzustand eines Resonators ist die Amplitude der stehenden elektromagnetischen Welle im Zentrum am größten. Eine makroskopische Besetzung des Grundzustands verstärkt die Lokalisierung der elektromagnetischen Energie zum Zentrum hin. Die Photonenenergie im überkritischen Resonator verteilt sich um. Vorher war die ganze elektromagnetische Energie auf den gesamten Raum des Resonators verteilt. Mit dem Phasenübergang emergiert stationäre Energie in der Mitte des Resonators. Entsprechend der Einsteinschen Energie-Masse-Äquivalenz kommt ihr Masse zu. Da eine stationäre, in einem kleinen Teilbereich des Resonators lokalisierte Energie vorliegt, handelt es sich um eine Ruhemasse. Das ist das Kriterium für Materie.

(Neue Publikationen zur Photonekondensation siehe [96], [97].)

[96] Eberhard E. Müller: „Note on Bose-Einstein condensation of photons“, arXiv: 1801.05220 [quant-ph], 16. Januar 2018.

[97] Eberhard E. Müller: „General theory of Bose-Einstein condensation applied to an ideal quantum gas of photons in an optical microcavity“. Phys. Rev.A 100, 053837 (2019).

Der stationäre lokalisierte Charakter des Photonenkondensats wird im Unendlich-Volumen-Limes besonders deutlich. In dieser Idealisierung wird von der Resonatorwand abstrahiert. Dann ist ausgeschlossen, das Kondensat in irgendeiner Weise als stehende Welle interpretieren zu können, die von mit Lichtgeschwindigkeit fliegenden hin- und her reflektierten Photonen ständig aufgebaut wird. Das mathematische Gegenstück zu diesem Argument ist die Tatsache, dass vor dem Limes das chemische Potential des Photonengases ungleich Null ist, während es im Limes Null wird. Die Energie der "Photonen" im Kondensat wird infinitesimal klein. Die Zahl der Photonen, die das Kondensat aufbauen, führen im Limes auf eine divergierende, unendlich große Photonenzahldichte [91]. Das ist in der Physik als Infrarotkatastrophe bekannt. Unendlich viele "Photonen" mit infinitesimal kleiner Photonenenergie bilden eine endlich große Kondensatenergie. Streng genommen ist nach dem Limes das Photonenkonzept auf das Photonenkondensat nicht mehr anwendbar. Etwas qualitativ Neues, etwas Materielles ist entstanden.

Peter T. Landsberg hatte bereits 1961 in seinem Buch "Thermodynamics" (Interscience, New York, S. 211) die Spekulation angestellt, Materie könnte als ein Photonenkondensat aufgefasst werden ("speculatively"). Einen Beweis für diese Vermutung hat er nicht vorgelegt. In seinem späteren Buch "Thermodynamics and statistical mechanics" (Oxford UP, 1978) ist diese Spekulation nicht enthalten. Landsberg hat sie aber aufrechterhalten (private Mitteilung, bei seiner Teilnahme am Symposium "100 Years of Quantum Theory", Oktober 2000, Schwerte.) Eine Photonenkondensation war lange Zeit kein Gegenstand im Diskurs der Physik. Einstein hat sich dazu nie geäußert; zu diesem Recherche-Ergebnis kommt Abraham Pais in [28].

Ausblick

Eine Bose-Einstein-Kondensation ist grundsätzlich in jedem großkanonischen idealen Gas von Bosonen mit Ruhemasse Null denkbar. Sie funktioniert für Nicht-Photonengase genauso wie bei der Photonenkondensation. Neben Photonen kommen Phononen und Gravitonen in Frage. Phononen sind die Quanten von Schallwellen. Gravitonen sind die Quanten des Gravitationswellenfeldes. Gravitonen haben Ruhemasse 0 und Spin 2, letzteres im Unterschied zu den Photonen mit Spin 1. Eine Galaxie lässt sich nun zum einen als Photonenresonator für elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen bis zu Tausenden von Lichtjahren vorstellen. Hypothetisch könnte dann die dunkle Materie ein Photonenkondensat sein. Zum andern ließe sich eine Galaxie alternativ als Gravitonen-Resonator für Gravitationswellen mit Wellenlängen von ebenfalls bis zu Tausenden von Lichtjahren vorstellen. Hypothetisch wäre in diesem Fall ein Gravitonenkondensat die dunkle Materie. Welche Hypothese zutrifft, muss experimentell entschieden werden.