2. Klassisches Teilchenbild: Charakteristika der Newtonschen Mechanik

Unsere Alltagserfahrung vermittelt den Eindruck, dass sich die Sonne um die Erde bewegt.
Demgegenüber bezieht **Nikolaus Kopernikus** (*19.2.1473, † 24.5.1543) vor rund 500 Jahren einen ganz anderen Standpunkt:
Die Erde kreist um die Sonne. Er geht von einem geozentrischen zu einem heliozentrischen Bild über.

Der Vorteil: Das neue System vereinfacht die Beschreibung der Bewegung der Planeten.
Die neue Sichtweise markiert den Beginn der neuzeitlichen Naturwissenschaft.

Kopernikus: *„De revolutionibus orbium coelestium libri VI", 1543.* (Über die Kreisbewegungen der Weltkörper.)
Der Druck des Buches wurde von seinem Schüler Joachim Rheticus betrieben und erfolgte Andreas Osiander, Nürnberg. In einer anonymen Vorrede bezeichnete Osiander das kopernikanische Modell als eine Hypothese.

Galileo Galilei
* Pisa 15. Februar 1564, † Arcetri bei Florenz 8. Januar 1642.
1589 Mathematikprofessur in Pisa, ab 1592 in Padua. Dort **Pendelgesetz**.

Galilei geht systematisch fragend, mathematisch beschreibend und experimentell beobachtend vor.
Durch Gedankenexperimente kommt er zum **Gesetz des freien Falls** (1609) und bestätigt es an einer Fallrinne experimentell (ungefähr):

1. Im Vakuum fallen alle Körper gleich schnell.
2. Die Bewegung ist gleichförmig beschleunigt.

Ad 1.:

Galilei denkt sich drei Kugeln aus Gold, Blei und Holz.
Im Quecksilber fällt nur das Gold nach unten.
Im Wasser fallen Gold und Blei, aber das Gold deutlich voraus.
In Luft fallen alle drei Körper. Nun ist kein Unterschied mehr zwischen Gold und Blei, nur das Holz bleibt ein wenig zurück.

Galileis **Extrapolation**: „Angesichts dessen glaube ich, dass, wenn man den Widerstand der Luft ganz aufhöbe, alle Körper gleich schnell fallen würden."
Galilei: Nehmen wir an, Aristoteles habe recht, dass schwerere Körper schneller nach unten fallen als leichtere. Denken wir uns einen großen Körper M und einen kleinen m, beide verbunden. Dann müsste nach Aristoteles der neue Körper M+m schneller fallen. Das ist absurd, da der kleine Körper m, da er langsamer fällt, die Bewegung des großen eigentlich bremsen müsste. Aristoteles' Aussage führt also auf einen Widerspruch.

Ad 2.:

Die Geschwindigkeit des Körpers nimmt proportional mit der Zeit zu:

$\mathbf{v} \sim \mathbf{t}$

Die zurückgelegte Strecke wächst proportional zum Quadrat der Zeit:

$\mathbf{s} \sim \mathbf{t}^2$

Galilei unterstellt dabei die Einfachheit der mechanischen Gesetze.
(Nach Armin Hermann [17])

[17] Armin Hermann: „Weltreich Physik“. Bechtle Verlag, Esslingen a. Neckar, 1980, S. 12-17.

Johannes Kepler
* Weil der Stadt 27. Dezember 1571,
† Regensburg 15. November 1630

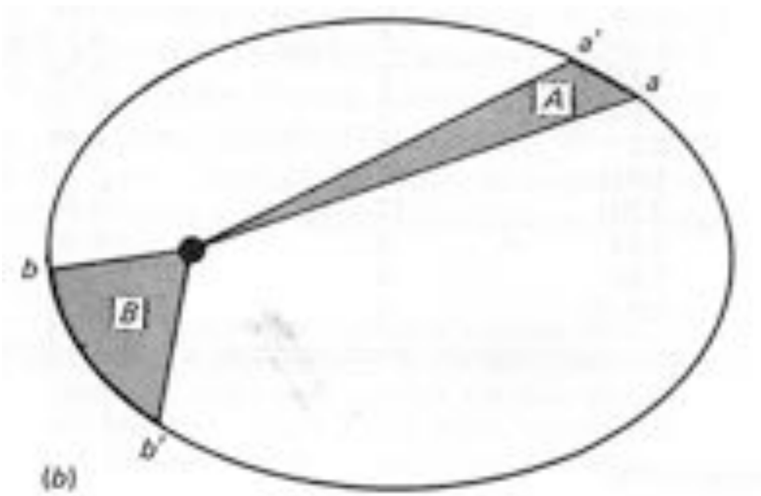
1600
Kepler arbeitet in Prag mit dem dänischen Astronomen Tycho Brahe zusammen.

1601
wird er kaiserlicher Hofmathematiker. Um die Bahndaten des Mars aus den beobachteten Werten präzise rekonstruieren zu können, entwickelt er die Grundlagen der Optik und wichtige Teile der Infinitesimal- und Integralrechnung, lange vor Leibniz und Newton.

1605
(Ostern) Kepler erkennt die Ellipsenform der Bahn des Mars und der anderen Planeten.

Keplersche Gesetze:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Die von der Sonne zu einem Planeten gezogene Verbindungslinie („Fahrstrahl“) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Zeichnung b). (1602)
3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen (15. Mai 1618).

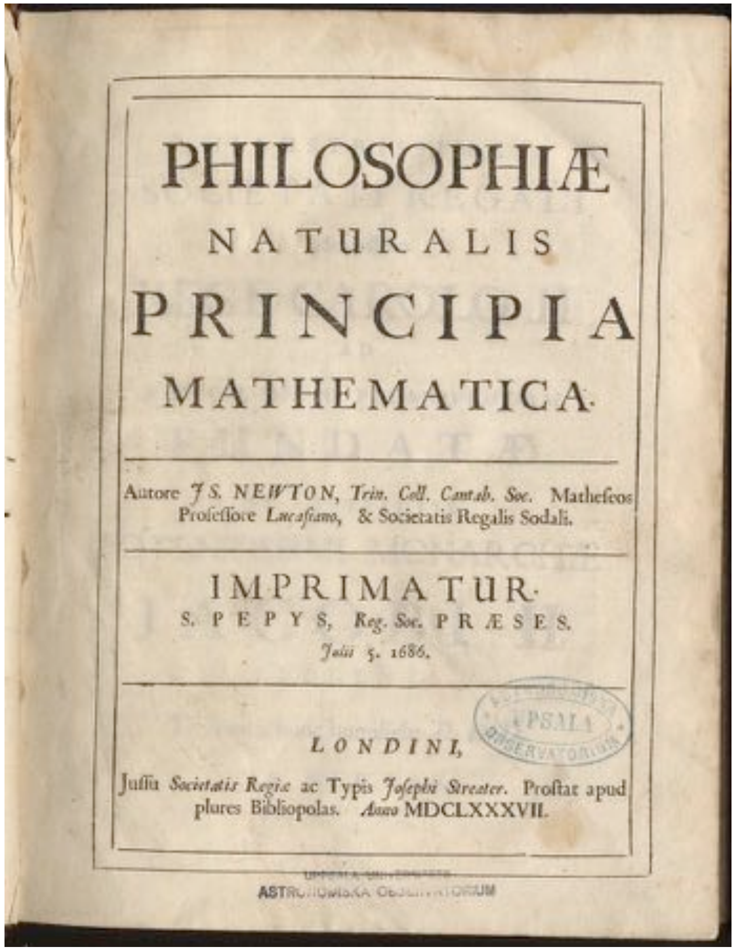


http://rst.gsfc.nasa.gov/Sect19/Kepler2.JPG

Isaac Newton
* Woolsthorpe bei Grantham 4. Januar 1643,
† Kensington (London) 31. März 1727
(nach dem bis 1752 in Großbritannien gültigen Julianischen Kalender
*25. Dezember 1642, †20. März 1727).

1666
Gravitationsgesetz

1687
Newtonsche Mechanik: „Die mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie" („Philosophiae naturalis principia mathematica").
Dieses Werk ist die Grundlage der mathematisch formulierten Physik.



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

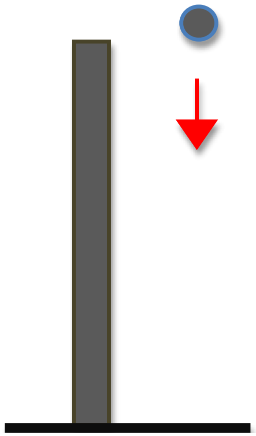
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

mathground.net

2.1 Freier Fall im Gravitationsfeld



empirische Daten zum freien Fall, aufgerundet, im Vakuum

Zeit	Fallstrecke	Geschwindigkeit	Beschleunigung
0 s	0 m	0 m/s	10 m/s^2
1 s	5 m	10 m/s	10 m/s^2
2 s	20 m	20 m/s	10 m/s^2
3 s	45 m	30 m/s	10 m/s^2

Ball, Masse m_1

$$F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$ Gravitationsgesetz

Erde, Masse m_2

Notation:

r: Abstand zwischen fallendem Ball und Mittelpunkt der Erde
x: Weg des fallenden Balls
$r = x + R$
R = 6380 km, Radius der Erde; Annahme: die Masse der Erde in ihrem Mittelpunkt konzentriert.
G: Gravitationskonstante

Zur Beschreibung des freien Falls benutzen wir folgende Observablen:

Zeit t, Einheit: Sekunde, s
Fallweg x, Einheit: Meter, m
Geschwindigkeit v, Einheit: m/s
Beschleunigung a, Einheit: m/s^2

Die Ortsvariable x wird Funktion der Zeitvariable t:

(1) $t \rightarrow x(t)$, für alle Zeitwerte t.

(1) beschreibt die Bahn eines Massenpunkts.
Geschwindigkeit und Beschleunigung werden mit Hilfe des Infinitesimalkalküls definiert.
Die Impulsvariable wird in der Newtonschen Mechanik als Produkt von Masse und Geschwindigkeit definiert:

$$p = m\,v$$

In der Infinitesimalrechnung werden kleine Differenzen immer kleiner gemacht, im Limes infinitesimal "klein".

Geschwindigkeit: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ x: der in der Zeit t zurückgelegte Weg; Δ bezeichnet eine Differenz.

$$v = \lim_{\tau \to 0} \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$a = \lim_{\tau \to 0} \frac{v(t+\tau) - v(t)}{\tau} = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

Definition:

(2) $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

(3) $a(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$ Notation: $\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt}$

Die Gravitationsbeschleunigung auf der Oberfläche der Erde ist näherungsweise konstant. Sie schwankt leicht um den Wert $g = 9{,}81\ m/s^2$. Für den freien Fall beschreiben die folgenden Beziehungen die empirische Erfahrung (siehe obige Tafel).

(4) $v(t) = g\, t$ Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t

(5) $s(t) = \frac{1}{2} g\, t^2$ Fallstrecke zum Zeitpunkt t

Gleichung (4) kann der Tafel unmittelbar entnommen werden: In jeder Sekunde wächst die Geschwindigkeit um 10 m/s. 10 m/s pro Sekunde heißt 10 m/s^2. Um Gleichung (5) der Tafel zu entnehmen, müssen wir raten oder probieren. Das ist unbefriedigend. Ein systematisches Vorgehen ist wünschenswert. Genau das leistet das Werkzeug der Differentialgleichungen.

Wir lesen Gleichung (2) als gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung, und Gleichung (3) als gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.
Wir können aber auch Gleichung (3) mit Hilfe von Gleichung (2) als Differentialgleichung 1. Ordnung schreiben. Für den freien Fall beachten wir, daß die Erdbeschleunigung konstant ist, $a(t) = g$, für alle Zeitwerte t.

(3.a) $$a(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$

(6) $$\frac{d}{dt} v(t) = g \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + g\,t$$

(7) $$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = g \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,g\,t^2$$

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung lässt 1 Integrationskonstante zu.
In (6) ist die Integrationskonstante die Anfangsgeschwindigkeit v_0.
Eine Differentialgleichung 2. Ordnung lässt 2 Integrationskonstanten zu.
In (7) ist es neben der Anfangsgeschwindigkeit v_0 die Startkoordinate x_0.

In unserem Hauptbeispiel freier Fall nehmen wir an, dass die Anfangsdaten den Wert $v_0 = 0$ und $x_0 = 0$ haben.

2.2 Newtonsche Axiome:

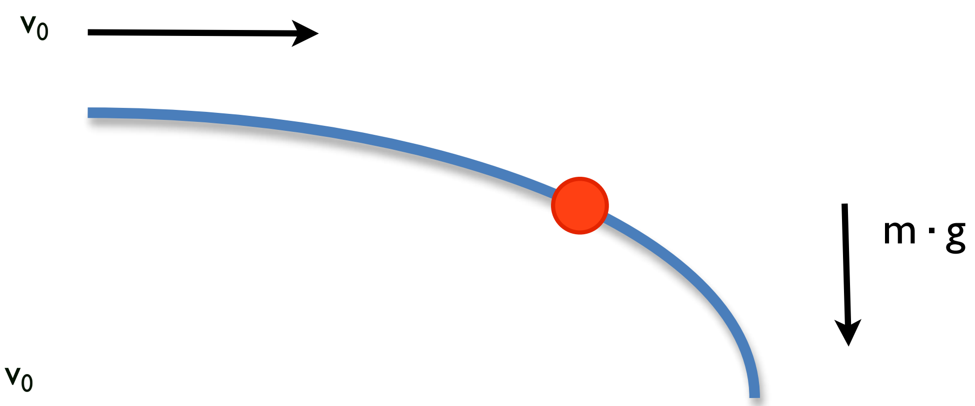
Trägheitsgesetz:
Ursache der Beschleunigung eines Körpers ist eine auf ihn einwirkende Kraft, d. h. jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung.

Kraftgesetz
Die Bewegungsänderung (Beschleunigung) eines Körpers ist der einwirkenden Kraft proportional und ihr gleichgerichtet.

$$F = m \frac{d^2}{dt^2} x(t) \tag{8}$$

Actio gleich reactio
Übt ein Körper A auf einen Körper B eine Kraft F_1 aus, so übt stets auch der Körper B auf den Körper A eine Kraft F_2 aus, die von gleichem Betrag, aber entgegengesetzter Richtung ist: $F_1 = - F_2$.

Beispiel: Horizontaler Wurf einer Kugel im Schwerefeld der Erde



Komponenten der Bewegung:

horizontal: Kräftefreie Bewegung
nach Abstoß mit Geschwindigkeit v_0
vertikal: Erdbeschleunigung

Das Kraftgesetz (8) ist das dynamische Grundgesetz der Newtonschen Mechanik:

Kraft = Masse · Beschleunigung

Wir können es sofort auf den freien Fall anwenden. Wir multiplizieren die Differentialgleichung für die Fallbeschleunigung (7) mit m:

(9) $$m \cdot g = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

Die Kraft $m \cdot g$ beschleunigt die "träge" Masse m. Diese Fallbeschleunigung wird durch die Anziehungskraft der Erde verursacht.
Gleichung (9) drückt das dynamische Grundgesetz (8) aus.

Wenn wir eine "schwere" Masse m_I von 1 kg im Schwerefeld der Erde festhalten, dann spüren wir die Gewichtskraft dieses Körpers, die wir mit einer Waage messen können.
Sie beträgt

$$m_I \cdot g = 1\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 9{,}81\ \text{N};$$

$$1\ \text{N} = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$ ist die Maßeinheit der Kraft.

Präzisionsmessungen ergeben, dass schwere Masse und träge Masse gleich groß sind.
Albert Einstein (1879-1955) nimmt diese Beobachtung als Grundpostulat seiner **Allgemeinen Relativitätstheorie** (1915).

Die Erdanziehungskraft auf die Masse m_1 wird durch das Newtonsche Gravitationsgesetz beschrieben:

$$(10) \quad F_G = m_1 g = G \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

$$g = G \frac{m_2}{R^2}$$

m_2 ist die Masse der Erde. Die Gravitationskonstante G lässt sich im Labor bestimmen (Henry Cavendish, 1798). Der Erdradius R ist aus der Erdvermessung bekannt.
Damit lässt sich die Masse der Erde bestimmen:

$$m_2 = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot (6{,}38 \cdot 10^6 m)^2}{6{,}674 \cdot 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2}} = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg.}$$