2.3 Grundlagen der Newtonschen klassischen Mechanik

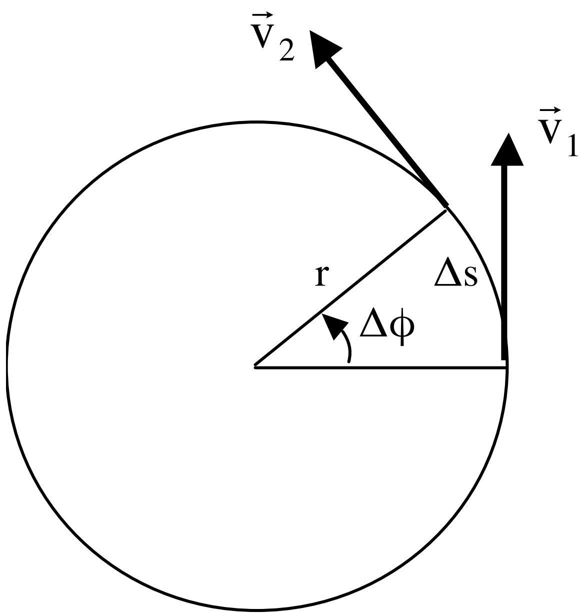
Welche expliziten und impliziten Konzepte liegen der Newtonschen Mechanik zugrunde, wie wir sie in der exemplarischen Vorbereitung kennengelernt haben? Unser Interesse gilt besonders den sich abzeichnenden Unterschieden zwischen der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik.

1. Die klassische Mechanik beschreibt Massenpunkte bzw. massive Objekte, die einen klar definierten Raum einnehmen.
2. Sie sind räumlich anschaulich.
3. Sie lassen sich als real existierend annehmen.
4. Die klassische Mechanik beschreibt einzelne, separierbare Objekte, oder aus Objekten zusammengesetzte Systeme.
5. Die klassische Mechanik setzt Raum und Zeit voraus, als reine Anschauungsformen a priori (Immanuel Kant, 1724-1804).
6. Die Bewegung der Objekte und Systeme der klassischen Mechanik in Raum und Zeit ist deterministisch, berechenbar, prognostizierbar. Das drücken Newton's Axiome aus.

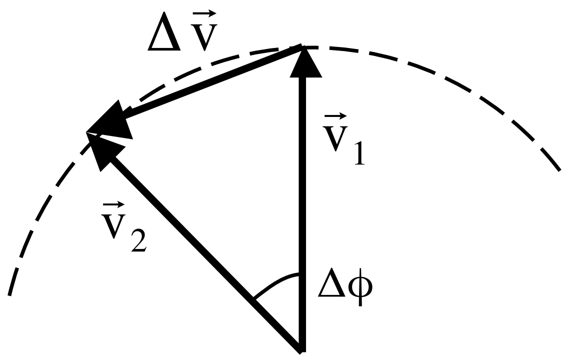
Dieses Konzept der klassischen Newtonschen Mechanik lässt sich mit "Teilchenbild" zusammenfassen.

2.4 Gleichförmige Kreisbewegung

Ein Teilchen (Massenpunkt) bewege sich auf einer Kreisbahn. Der Betrag seiner Geschwindigkeit sei konstant (gleichförmige Kreisbewegung).



$\Delta s = r \cdot \Delta\phi$



$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Für kleine Winkel $\Delta\varphi$ gilt bei dem Betrage nach konstanter Bahngeschwindigkeit v

$$\Delta v = v \cdot \Delta\varphi$$

$dv = v \cdot d\varphi$ infinitesimal, Leibnizsche Schreibweise für die Differentiale

Definitionen

$\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ Winkelgeschwindigkeit: pro Zeit Δt zurückgelegter Winkel $\Delta\varphi$

$\phi = \omega \cdot t$ Gesamter in der Zeit t zurückgelegter Drehwinkel

$v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot r = \omega \cdot r$ Bahngeschwindigkeit

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ Gerichtete Bahngeschwindigkeit

Der Vektor $\vec{\omega}$ zeigt in Richtung der Drehachse.
Die Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$ steht senkrecht auf dem Radiusvektor $\vec{r}$
und zeigt in Richtung der Tangente der Bahnkurve.

Radial- bzw. Zentripetalbeschleunigung:

$$a_r = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = v \cdot \omega$$

Mit der Beziehung $v = \omega \cdot r$ ergibt sich für die Zentripetalbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Die Richtung der Zentripetalbeschleunigung ist dem Radiusvektor entgegengerichtet.

Ein Körper bewegt sich nur dann auf einer Kreisbahn, wenn er eine dem Betrage nach gleich bleibende, nach dem Mittelpunkt hin gerichtete Beschleunigung erfährt.

Zentrifugalkraft:

Ein auf einer Kreisbahn rotierender Körper der Masse m erfährt eine der Zentripetalbeschleunigung entgegengesetzte, dem Betrage nach gleich große Zentrifugalbeschleunigung.

Setzen wir diese Beschleunigung in das Newtonsche Kraftgesetz ein, erhalten wir die Zentrifugalkraft:

$$(11) \qquad F_Z = m\,\omega^2 \cdot r = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Die Vektorschreibweise gibt die Richtung mit an. Die Zentrifugalkraft zeigt radial vom Kreismittelpunkt nach außen, in Richtung des Radiusvektors:

$$\vec{F}_Z = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$

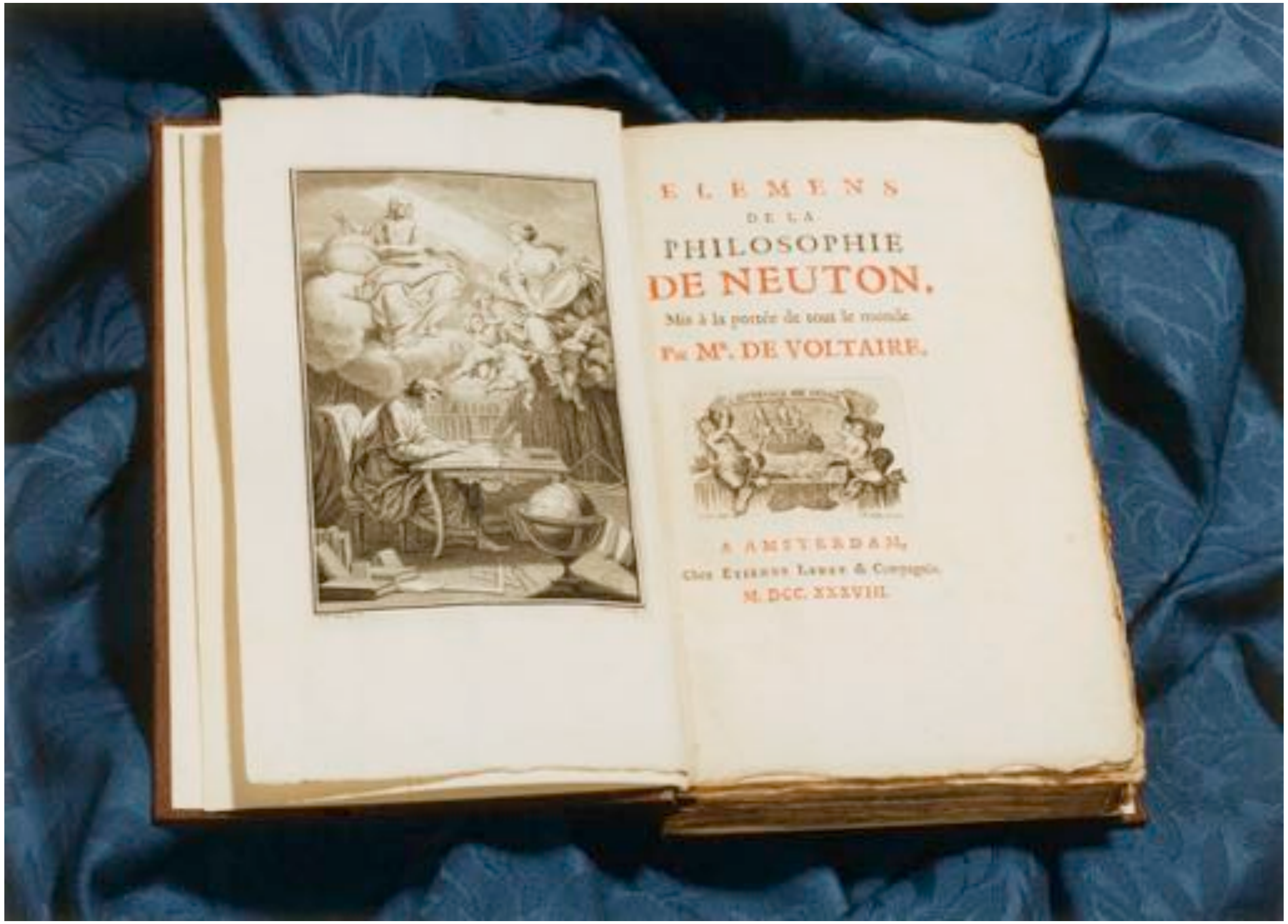
Zwischenbilanz:

Die Differentialgleichung (7) des freien Falls, geschrieben in der Form (9), drückt das Kraftgesetz der Newtonschen Axiome aus. Zur Beschreibung einer Bahn (1) bedarf es der Fixierung der Ortsvariablen und der Geschwindigkeitsvariablen zu einem bestimmten Zeitpunkt. Typischerweise wird der Beginn der Bahn genommen: x(0) und v(0) sind die Integrationskonstanten des Newtonschen Kraftgesetzes, das eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung ist. Das Newtonsche Kraftgesetz gilt für beliebige Richtungen im Raum (beispielsweise für horizontale Beschleunigung) und lässt sich auf beliebige Bahnen anwenden. Beispielsweise auf eine gleichförmige Kreisbahn (Abschnitt 2.4): Der Betrag der Bahngeschwindigkeit v ist konstant, gleichwohl findet durch die ständige Richtungsänderung der Geschwindigkeit eine Beschleunigung statt.

Mit ihren Beiträgen zur Physik entwickeln Galilei, Kepler, Newton ein kritisches, methodisches, experimentell fundiertes und mathematisch präzisierendes Vorgehen, das den Grund neuzeitlicher empirischer Wissenschaft legt.

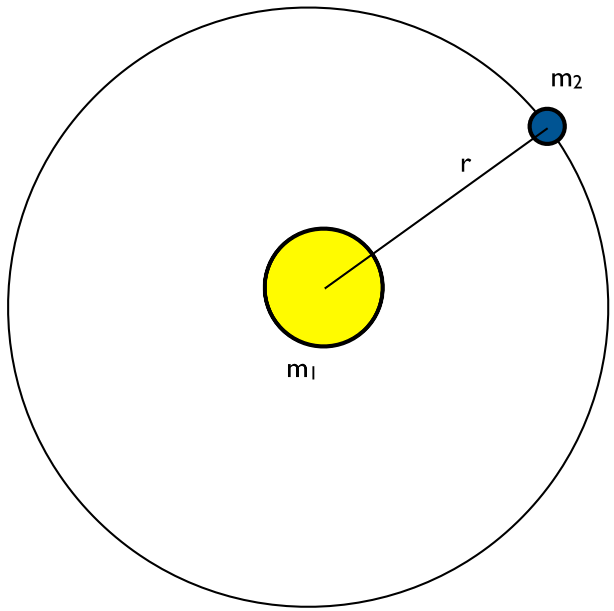
Die Gelehrten, Künstler, Literaten der damaligen Zeit waren an den Arbeiten der Physiker interessiert. Das öffentliche Interesse nahm mit dem 18. Jahrhundert zu, dem Jahrhundert der Aufklärung.

Newton erhielt in der Westminster-Kathedrale ein Staatsbegräbnis. Voltaire war unter den Trauergästen. - Er hielt sich nach seiner Verbannung aus Frankreich in England auf. - Nach seiner Rückkehr nach Frankreich zieht er zu Marquise du Chatelet, seiner Geliebten, auf das Schloß Cirey in der Champagne. Dort führen sie physikalische Experimente durch und studieren intensiv Newtons Schriften. Du Chatelet übersetzt Newtons Hauptwerk, Philosophiae Naturalis Principiae Mathematica ins Französische. Voltaire selbst verfasst eine verständliche Darstellung von Newtons Physik. Das Buch wurde in Paris Bestseller [17].



lelivrescolaire.fr

2.5 Planetensystem, klassisches Atommodell



Planetensystem

Gravitationsgesetz

$$F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Zentrifugalkraft

$$F_Z = m_2\, \omega^2 \cdot r$$

Die Gravitationskraft zwischen Sonne und Erde ist gleich groß wie die Zentrifugalkraft der Erde auf ihrer (näherungsweisen) Kreisbahn um die Sonne: Die Gravitationskraft „hält“ die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne.

Der Abstand zwischen Erde und Sonne kann aus astronomischen Daten ermittelt werden.
Mittlerer Wert: r = 149,6 Mio km;
Umlaufzeit der Erde um die Sonne: $T = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600$ s $= 31.557.600$ s;
Kreisfrequenz der Umdrehung der Erde um die Sonne: $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi / T$

Gleichsetzung von Gravitationskraft und Zentrifugalkraft: $m_1 = \omega^2 \cdot r^3 / G$
Daraus ergibt sich die Masse der Sonne: $m_1 = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg $= 333.000\ m_2$.
Zum Vergleich siehe [18].

[18] Horst Kuchling: „Taschenbuch der Physik“. Fachbuchverlag Leipzig, 2004, S. 149.

Entdeckung des Atomkerns

Versuche von Hans Geiger (1882-1945) und Ernest Marsden (1889-1970) unter Leitung Ernest Rutherfords (1871-1937) in Manchester, 1908-1911, decken die Struktur des Atoms auf: ein elektrisch positiv geladener, sehr kleiner massiver Kern wird von einer elektrisch negativ geladenen Hülle umgeben, die aus Elektronen gebildet wird. Die Experimentatoren beschossen dazu eine dünne Goldfolie mit α-Strahlen, also Heliumkernen. Der größte Teil der α-Teilchen ging ungestört durch die Folie durch, ein kleiner Teil wurde abgelenkt, einige wenige sogar zurückgestreut.

Klassisches Atommodell

Coulomb-Gesetz

$$F_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Zentrifugalkraft

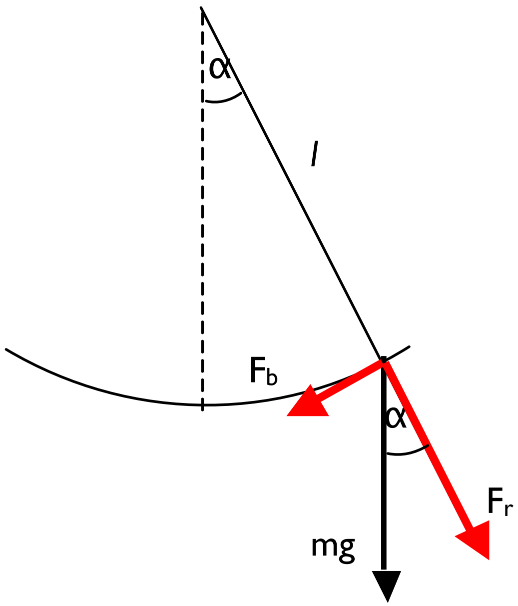
$$F_Z = m_2\,\omega^2 \cdot r$$

Die elektrische Coulomb-Kraft zwischen dem Kern eines Wasserstoffatoms (1Proton, Q_1 = e) und einem ihn „umkreisenden“ Elektron (Q_2 = − e) ist gleich groß der Zentrifugalkraft, die das Elektron auf einer „Kreisbahn“um den Kern erfährt: Die Coulomb-Kraft „hält“ das Elektron auf seiner Bahn.

Das Coulomb-Gesetz (Charles Augustin Coulomb, 1736-1806), 1785 gefunden, hat die gleiche mathematische Form wie das Gravitationsgesetz. Beide geben die Kraft zwischen zwei punktförmig gedachten Körpern mit einem Abstandsgesetz $1/r^2$ an. $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm) ist die elektrische Feldkonstante [18]. Die Kraft zwischen Massen ist immer anziehend. Dagegen gibt es positive und negative elektrische Ladung. Ladungen mit verschiedenem Vorzeichen ziehen sich an, Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab.

2.6 Schwingungen. Harmonischer Oszillator

Mathematisches Pendel



Ein Massepunkt mit der Masse m ist an einem näherungsweise masselosen Faden der Länge l befestigt und schwingt mit kleinen Pendelausschlägen. Die an der Masse m angreifende, nach unten gerichtete Schwerkraft mg wird in eine Komponente F_r in der momentanen Richtung des Fadens und in eine dazu senkrecht liegende Tangential-Komponente F_b in Richtung der momentanen Schwingungsbewegung zerlegt. Die den Faden spannende Kraft F_r (wir nehmen an, daß die Länge l des Fadens näherungsweise unverändert bleibt) trägt nicht zur Pendelbewegung bei. Die beschleunigende Kraft ist

$$F_b = mg \cdot \sin\alpha \approx mg \cdot \alpha$$

Beim letzten Schritt machen wir von der Näherung $\sin\alpha \approx \alpha$ Gebrauch, die für kleine Winkel gilt. Der Weg des Massenpunktes auf dem während einer Schwingung zurückgelegten Kreisbogen wird durch die Koordinate l beschrieben. Entsprechend gilt für den Betrag v der Bahngeschwindigkeit und den Betrag a der Bahnbeschleunigung:

$$v = l \cdot \frac{d}{dt}\alpha, \quad a = l \cdot \frac{d^2}{dt^2}\alpha.$$

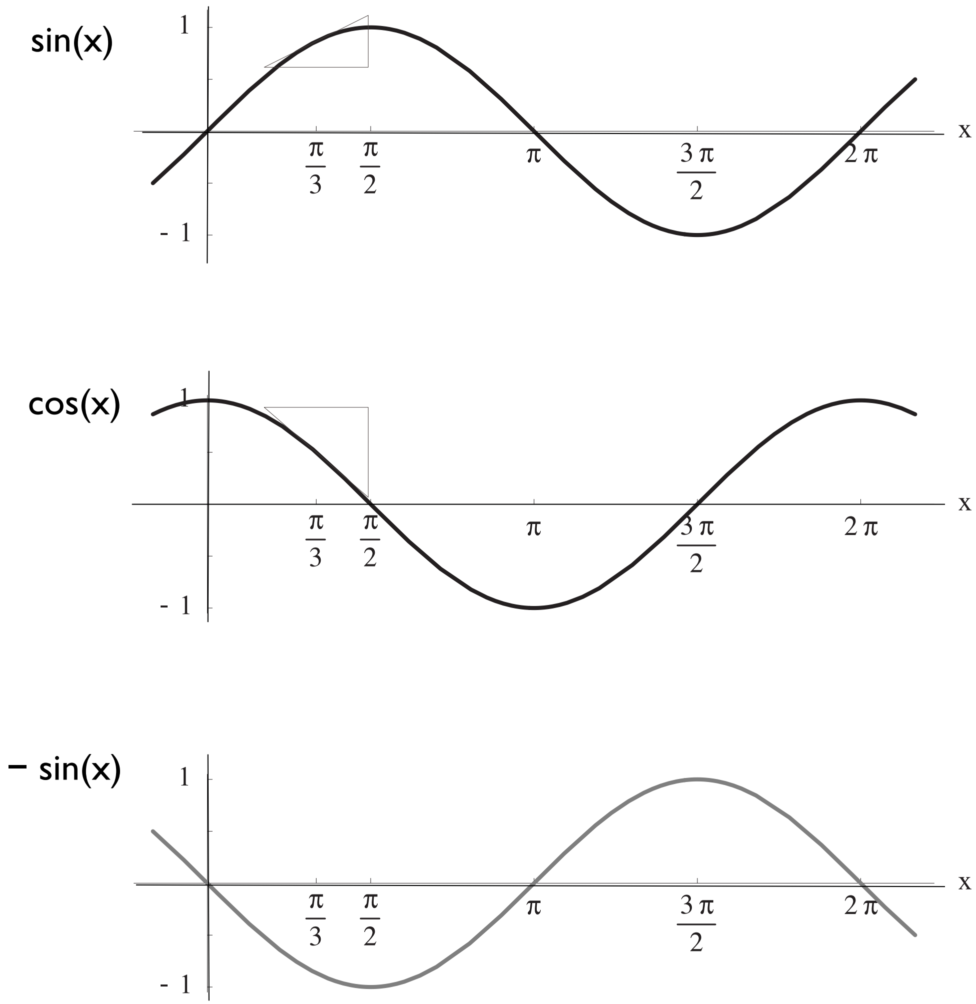
Die Newtonsche Kraftgleichung (8) für das mathematische Pendel lautet

$$F_b = m \cdot a$$

$$mg \cdot \alpha \;=\; -m \cdot l \cdot \frac{d^2}{dt^2}\,\alpha$$

(12) $$g \cdot \alpha + l \cdot \frac{d^2}{dt^2}\alpha = 0$$

Das Minuszeichen in der vorletzten Zeile ist der Tatsache geschuldet, dass die Beschleunigung entgegen der positiven Winkelrichtung erfolgt (Zeichnung). Gleichung (12) beschreibt eine ungedämpfte harmonische Schwingung. Ein durch den Gleichungstyp (12) beschriebenes System heißt harmonischer Oszillator.


sin(x)
1
- 1
x
π/3
π/2
π
3π/2
2π
cos(x)
1
- 1
x
π/3
π/2
π
3π/2
2π
− sin(x)
1
- 1
x
π/3
π/2
π
3π/2
2π

Ansatz zur Lösung von Gleichung (10):

(13) $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$

α_0: Amplitude der Auslenkung
φ_0: Phase, Auslenkung zu Beginn
ω: Winkelgeschwindigkeit;
$\omega \cdot t = \varphi$ ist ein Winkel.

$$\frac{d}{dt}\,\alpha(t) = \omega\,\alpha_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\alpha(t) = -\omega^2\,\alpha(t)$$

Eingesetzt in Gleichung (12) ergibt

$$g \cdot \alpha(t) - \omega^2 \cdot l \cdot \alpha(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$g - \omega^2 \cdot l = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

(14) $\omega = \pm\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

Das Vorzeichen gibt den Drehsinn an: linksdrehend (entgegen dem Uhrzeigersinn) oder rechtsdrehend:

Die hier gleichmäßige Winkelgeschwindigkeit ω lässt sich auch als Kreisfrequenz ansehen, wobei folgender Zusammenhang zur Frequenz f besteht:

$$\omega = 2\pi f$$

Die Funktion (13) löst die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators (12).
Sie beschreibt eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz .

Eine einfache Uhr

Wie lang muss der Faden eines Pendels gewählt werden, damit die Schwingungsdauer T
1 s beträgt?

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

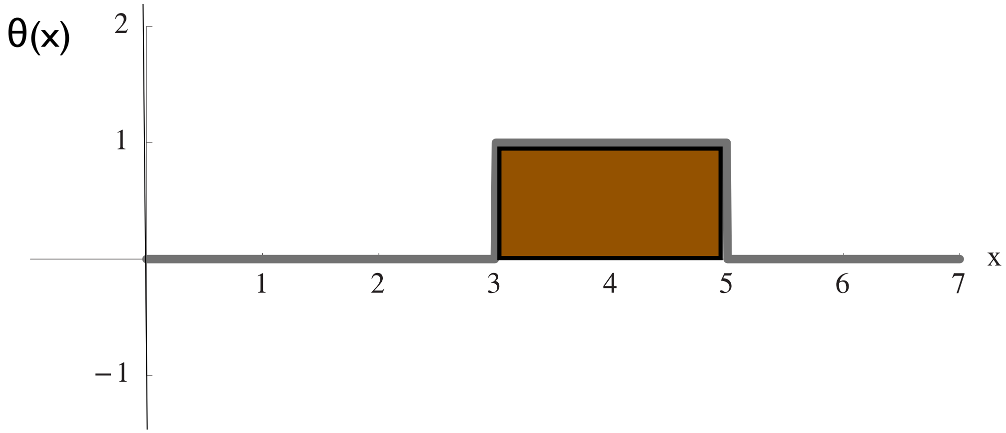
Wir benutzen Gleichung (14) um die Länge l des Fadens des Pendels zu erhalten.

$$T = 1\ s = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad l = g \cdot \frac{1s^2}{4\pi^2} = 0.25\ m.$$

Wenn wir die Zahl der Perioden (von 1 Sekunde) abzählen, haben wir eine einfache Uhr.

Detektierfunktion zur Lokalisierung eines massiven Körpers:

$\theta_{[3,5]}(x) = 1$, falls $x \in [3, 5]$
$\theta_{[3,5]}(x) = 0$, sonst



Charakteristische mathematische Größe für das Teilchenbild:

Ortsoperator Q

Q: $\theta(x) \rightarrow x \cdot \theta(x)$, für alle x, für alle „Detektierfunktionen" θ