VL: Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD
UE: Dr. Anna Zakharova

2. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mo 14.05. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Homokliner Orbit im Lorenz-System*

Homokline Orbits verbinden Fixpunkte mit sich selbst und lassen sich meist nur numerisch finden. In dieser Aufgabe soll solch eine homokline Verbindung für einen Fixpunkt des Lorenz-Systems gefunden werden.
Betrachten Sie das Lorenz-System

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\
\dot{y} &= \rho x - y - xz \\
\dot{z} &= xy - \beta z,
\end{aligned}
$$

mit $\sigma = 10$ und $\beta = 8/3$.
Wir untersuchen $1 < \rho < 24$. In diesem Parameterbereich gibt es drei Fixpunkte, die wir mit C_0, C_+ und C_- bezeichnen:

$$
\begin{aligned}
C_0 &:= (0,\, 0,\, 0), \\
C_\pm &:= (\pm\xi,\, \pm\xi,\, \rho - 1) \quad \text{mit} \quad \xi = \sqrt{\beta(\rho - 1)}.
\end{aligned}
$$

Die Fixpunkte $C_\pm$ sind stabile Foki.

1. Zeigen Sie, dass C_0 und $C_\pm$ tatsächlich Fixpunkte sind. Zeigen Sie weiterhin, dass C_0 für $\rho > 1$ ein Sattel mit einer instabilen Richtung und zwei stabilen Richtungen ist. Berechnen Sie den Eigenvektor $\mathbf{v}$ zur instabilen Richtung von C_0 (dies ist der Tangentialvektor an die instabile Mannigfaltigkeit).

Im folgenden soll ein homokliner Orbit von C_0 gefunden werden. Dieser Orbit existiert nur für einen ganz bestimmten Wert $\rho = \rho_*$.

2. Starten Sie die Simulation (für einen Wert von ρ) im Fixpunkt C_0 mit einer kleinen Auslenkung in Richtung von $\mathbf{v}$. Für $\rho < \rho_*$ landet man in einem der beiden Fixpunkt $C_\pm$ und für $\rho > \rho_*$ in dem Anderen (welcher Fixpunkt das genau ist, hängt davon ab, in welche Richtung man $\mathbf{v}$ gewählt hat).

   Bestimmen Sie ρ_* auf mindestens vier Nachkommastellen genau, indem Sie die Phasenportraits in der $(x,\, y)$-Ebene untersuchen und sich immer näher an ρ_* herantasten (*Tipp:* Intervallschachtelung). Die Simulationen sollten bis ca. $t = 100$ laufen und müssen eine relativ hohe Genauigkeit haben (kleine Schrittweiten).

   Plotten Sie das Phasenportrait des homoklinen Orbits (simulieren Sie dazu nur bis ca. $t = 5$).

   Bonus: Automatisieren Sie die Suche nach ρ_* mit einer Funktion, die entscheidet, ob man in C_+ oder C_- gelandet ist.

2. Übung SS18

Aufgabe 4 (10 Punkte): *SNIPER*

In der VL wurde ein einfaches Model einer SNIPER-Bifurkation (**s**addle-**n**ode **i**nfinite **per**iod) diskutiert. In Polarkoordinaten sind die dynamischen Gleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1-r^2),\\ \dot{\phi} &= b - r\cos\phi.\end{aligned}$$

Im folgenden soll nur die Dynamik von ϕ auf dem Kreis mit $r=1$ untersucht werden (das geht, weil der Kreis eine invariante Mannigfaltigkeit des Systems ist).

1. Untersuchen Sie die Fixpunkte des reduzierten Systems in Abhängigkeit vom Parameter b (Existenz, Position, Stabilität)

2. Finden Sie die Lösungen $\phi(t)$ durch Trennung der Variablen für $b<1$ und $b>1$. Benutzen Sie hierfür

$$\int \frac{d\phi}{b-\cos\phi} = \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \arctan\left[\frac{(b+1)\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{b^2-1}}\right] \qquad \text{für} \quad b>1,$$

$$\int \frac{d\phi}{b-\cos\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \log\left[\frac{(1+b)\tan\frac{\phi}{2}-\sqrt{1-b^2}}{(1+b)\tan\frac{\phi}{2}+\sqrt{1-b^2}}\right] \qquad \text{für} \quad b<1.$$

3. Plotten Sie für die beiden Fälle $b>1$ und $b<1$ die Zeitserien für $x(t)=\cos\phi(t)$ mit geeigneten Anfangsbedingungen.