

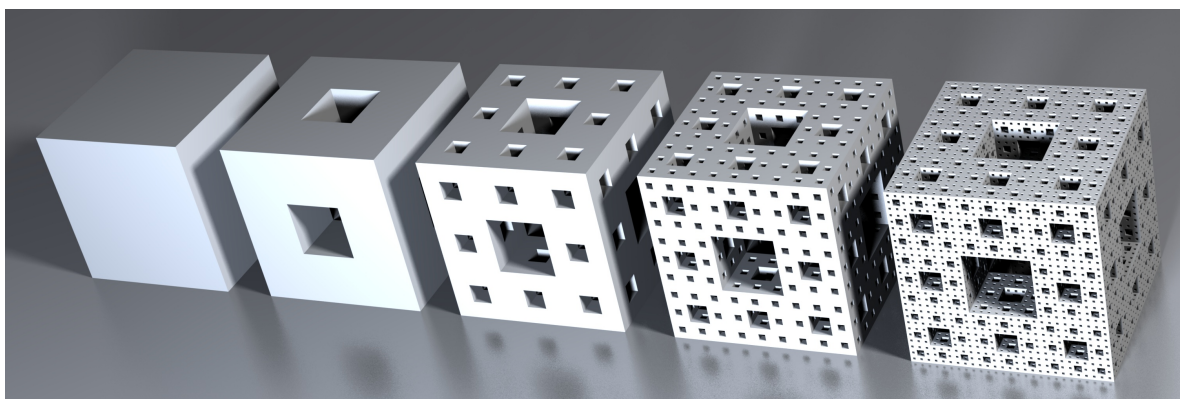
VL: Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD
UE: Dr. Anna Zakharova

3. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mo 28.05. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 5 (8 Punkte): Menger-Schwamm und fraktale Dimension



Der Menger-Schwamm (benannt nach Karl Menger) entsteht, wenn man einen Würfel in $27 = 3 \times 3 \times 3$ gleich grosse Würfel zerlegt, 7 dieser Würfel entfernt (siehe Abbildung) und dies rekursiv mit den übrig gebliebenen Teilwürfeln wiederholt.

1. Berechnen Sie die Oberfläche F_n und das Volumen V_n in Abhängigkeit der Iterationstiefe n ($n = 0$ entspricht dem vollen Würfel). Welche Werte ergeben sich im Limes $n \rightarrow \infty$.
2. Berechnen Sie die Hausdorffdimension des Menger-Schwamms.

Bonus: Schreiben Sie ein Programm, das den Menger-Schwamm bis zur Iterationstiefe n graphisch darstellt. Bis zu welchem n schafft es ihr Computer?

Aufgabe 6 (12 Punkte): *logistische Abbildung*

In dieser Aufgabe soll die Entstehung von Chaos in der logistischen Abbildung

$$x_{n+1} = f(x_n) := r x_n(1 - x_n), \quad (r \in [0, 4])$$

genauer untersucht werden. Berechnen Sie dazu numerisch ein Bifurkationsdiagramm und ein Diagramm des Lyapunov-Exponenten in Abhängigkeit r . Untersuchen Sie hiermit:

- Welchen Wert hat der Lyapunov-Exponent, wenn eine Periodenverdopplung auftritt? Was passiert im Bifurkationsdiagramm, wenn der Lyapunov-Exponent positiv wird?
- Es seien R_n die r Werte bei den Periodenverdopplungen. Finden Sie (aus dem Bifurkationsdiagramm) die ersten drei oder vier Verhältnisse

$$\delta_n = \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n}.$$

3. Übung SS18

Stimmen diese mit der universellen Feigenbaumkonstante $\delta = 4.669\dots$ überein? (Vergrössern Sie nötigenfalls die Genauigkeit in der Nähe der Periodenverdopplungen.)

Hinweise für die Numerik:

Verwenden Sie eine Sequenz von r Werten aus $[0, 4]$ mit geeigneter Auflösung. Für jeden r Wert iterieren Sie die Abbildung numerisch mit einer beliebigen Anfangsbedingung x_0 etwa 400 mal (bis Transienten abgeklungen sind). Danach verwenden Sie etwa 300 weitere Iterationen für das Bifurkationsdiagramm und ca. 2.000 Iterationen für die Lyapunov-Exponenten.

- *Berechnung der Lyapunov-Exponenten:* Bilden Sie (nach der Transienten) den Mittelwert der lokalen Lyapunov-Exponenten $\ln |f'(x_n)|$ über die ca. 2.000 berechneten x_n . Plotten Sie diesen Lyapunov-Exponent im Wertebereich $[-1, 1]$.
- *Bifurkationsdiagramm:* Plotten Sie (nach der Transienten) die 300 Werte von x_n über dem entsprechenden r Wert.

(Verwenden Sie als Bildformat z.B. `png` mit geeigneter Auflösung und keine Vektorgrafik, da sonst die Dateien durch die vielen Daten zu gross werden).