

VL: Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD
UE: Dr. Anna Zakharova

4. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi 04.06. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.

Aufgabe 7 (15 Punkte): Chaotikontrolle – OGY-Methode

Betrachten Sie die Henon-Map

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a + p - x_n^2 + b y_n, \\y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}$$

mit $b = 0.3$ und $a = 1.29$. Wir verwenden die Notation $\xi_n := (x_n, y_n)$ für den Zustandsvektor. In dieser Aufgabe soll ein instabiler Fixpunkt der Henon-Map stabilisiert werden, indem bei jeder Iteration der Kontrollparameter p in einem kleinen Intervall $-p_* < p < p_*$ (mit $p_* = 0.2$) geeignet variiert wird.

1. Zeigen Sie, dass es einen Fixpunkt bei

$$\xi_F := (x_F, x_F), \quad \text{mit} \quad x_F = \frac{1}{2} \left(b - 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4(a+p)} \right)$$

gibt und $x_F \approx 0.838486$ für $p = 0$ ist.

Dieser Fixpunkt ist ein Sattel und soll stabilisiert werden. Berechnen Sie den Eigenwert zur instabilen Richtung λ_u mit $|\lambda_u| > 1$ und den Eigenwert zur stabilen Richtung λ_s mit $|\lambda_s| < 1$ sowie die zugehörigen normierten Eigenvektoren \mathbf{e}_u und \mathbf{e}_s .

2. Berechnen Sie die dualen Vektoren \mathbf{f}_u und \mathbf{f}_s , für die gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_u \cdot \mathbf{e}_u &= 1, & \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{e}_s &= 0, \\ \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_s &= 1, & \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_u &= 0.\end{aligned}$$

3. Berechnen Sie den Vektor \mathbf{g} , der angibt, wie sich der Fixpunkt ξ_F ändert, wenn p verändert wird, sowie den Schwellwert δ (siehe Teil 4.):

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &:= \left. \frac{\partial}{\partial p} \xi_F(p) \right|_{p=0}, \\ \delta &:= p_* \left| (1 - \lambda_u^{-1}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{f}_u \right|.\end{aligned}$$

4. *Numerischer Teil:* Starten Sie die Iteration an einem beliebigen Punkt $\xi_0 \in [0, 1] \times [0, 1]$ mit $p = 0$ und schalten Sie nach ca. 300 Iterationen folgendes Kontrollverfahren ein:

Überprüfen Sie nach jedem Schritt, ob die Trajektorie nahe genug am Fixpunkt ist:

$$(\xi_n - \xi_F) \cdot \mathbf{f}_u < \delta$$

und ob das Kontrollsignal

$$p_n := \lambda_u (\lambda_u - 1)^{-1} ((\xi_n - \xi_F) \cdot \mathbf{f}_u) / (\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}_u)$$

im erlaubten Intervall $[-p_*, p_*]$ liegt. Wenn beides zutrifft, verwenden Sie das Kontrollsignal $p = p_n$, sonst setzen Sie $p = 0$ für die nächste Iteration. Plotten Sie die Zeitserien von x_n und dem Kontrollsignal p_n .

4. Übung SS18

Aufgabe 8 (5 Punkte): *Fourier-Transformation und Transferfunktion*

In dieser Aufgabe sollen einige Eigenschaften der Ableitungskontrolle und der zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle verglichen werden. Betrachten Sie ein nichtlineares dynamisches System

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) + u(t)$$

mit einem Kontrollsignal $u(t)$. Untersuchen Sie die Transferfunktion

$$T(\omega) = \hat{u}(\omega) / \hat{X}(\omega)$$

für die beiden Fälle

$$u(t) = -\gamma \dot{X}(t) \qquad \text{Ableitungskontrolle}$$

$$u(t) = \gamma [X(t - \tau) - X(t)] \qquad \text{zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle.}$$

Hierbei sind $\hat{u}(\omega)$ und $\hat{X}(\omega)$ die Fourier-Transformierten von $u(t)$ und $X(t)$. Wie verhält sich $|T(\omega)|$ für hohe Frequenzen? Plotten Sie $|T(\omega)|$ für geeignete Werte von γ und τ für die beiden Fälle.