3.2. Das freie Maxwellfeld

elektromagnetische Feld im Vakuum ($\rho = 0 = \vec{j}$)

$$H = E = \int d^3r \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_0}{2} \left| \vec{E}(\vec{r},t) \right|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left| \vec{B}(\vec{r},t) \right|^2 \right)}$$

Energiedichte aus ED $\hat{=} \int d^3r \, \mathcal{H}(r,t)$

Analogie: $H = T + V \rightarrow L = T - V$

rate von $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

Feldvariablen: Potentiale

$$\vec{E} = \underbrace{-\vec{\nabla}\phi} \underbrace{- \partial_t \vec{A}} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

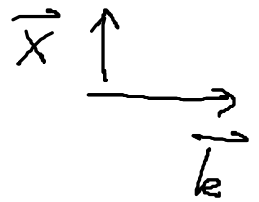
$$= \vec{E}_L + \vec{E}_T$$

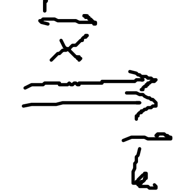
Coulombeichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

Vektortheorem von Helmholtz:

$\vec{}$

Jedes Vektorfeld X kann man zerlegen in einen transversalen und einen longitudinalen Anteil.





$$\vec{X} = \vec{X}_L + \vec{X}_T$$

die Rotation dieses Anteils verschwindet

die Divergenz dieses Anteils verschwindet

$$\vec{X}_T = \vec{X} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{X}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Herleiten der Gleichungen für ϕ, $\vec{A}$:

$\Box \vec{A} = 0$, $\Delta \phi = 0$ in Coulombeichung

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2} \left\{ (\vec{\nabla}\phi)^2 + 2 \vec{\nabla}\phi \dot{\vec{A}} + \dot{\vec{A}}^2 \right\}}_{} - \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2}_{}$$

E^2 B^2

(i) Ableitung der Gl. f. skalar Potential ϕ

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|t}}}_{=0} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|i}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

auch $2\nabla\phi\cdot\dot{\vec{A}}$

diskutieren

$$=0 \quad + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial \phi_{|i}}\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_u \phi_{|u}^2\right) = 0 \quad (*)$$

$$+\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_u 2\phi_{|u}\underbrace{\frac{\partial \phi_{|u}}{\partial \phi_{|i}}}_{\delta_{ui}}\right) = 0$$

$$\sum_i \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x_i}\phi_{|i} = 0$$

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\phi = 0$$

bestätigt: $\boxed{\Delta\phi = 0}$

$*$ - Bemerkung: fällt weg in Coulombedg.

$$L_{\nabla\phi\cdot\dot{\vec{A}}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \; 2\,\vec{\nabla}\phi\cdot\dot{\vec{A}}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \phi \, \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}}}_{0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}} + \underset{\to 0}{\text{Randterme}}$$

(ii) Ableitg. der Gleilg. f. Vektorpotential

$$\underset{①}{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x|t}}} + \underset{②}{\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x|i}}} = \underset{③}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x}}$$

$$① = \partial_t \left(\frac{\partial}{\partial A_{x|t}} \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\sum_u A_{n|t}^2 + 2 \phi_{|u} \cdot A_{n|t} \right) \right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{\cancel{2}} \partial_t \sum_u \left(\cancel{2} A_{u|t} + \cancel{2} \phi_{|u} \right) \underbrace{\frac{\partial A_{u|t}}{\partial A_{x|t}}}_{\delta_{ux}}$$

$$= \varepsilon_0 \, \partial_t \underbrace{\left(A_{x|t} + \phi_{|x} \right)}$$

$$= -\varepsilon_0 \, \partial_t \, E_x$$

$$② \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x|j}} = -\frac{1}{2\mu_0} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial A_{x|j}} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2$$

$$= -\frac{1}{2\mu_0} \sum_j \partial_{x_j} \, 2\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot \partial_{\underset{=j}{A_{x/j}}} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{z/y} - A_{y/z} \\ \underset{=}{A_{x/z}} - A_{z/x} \\ A_{y/x} - \underset{=}{A_{x/y}} \end{pmatrix}}_{\text{rot}\,\vec{A}}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\left(0 + \partial_z B_y - \partial_y B_z\right)$$

$$= \mu_0^{-1}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_x$$

③ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x} = 0$ $\qquad E_y, E_z$ analog

$$\overset{①}{\underbrace{-\varepsilon_0 \partial_t \vec{E}}} + \overset{②}{\vec{\nabla}\times\vec{B}\,\frac{1}{\mu_0}} \overset{③}{=} 0$$

$$\underbrace{-\varepsilon_0 \partial_t \vec{E}_L} + \underbrace{\varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{A} + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}} = 0$$

Vakuum

$$\vec{E}_L = 0 \qquad \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} = 0$$

$\vec{\ }\ \vec{\ }$

$$\nabla \cdot A = 0$$

$$\boxed{\nabla \vec{A} = 0}$$ ist bestätigt

$$\vec{E} = \underbrace{-\nabla\phi}_{E_L} - \partial_t \vec{A}$$

Der $\mathcal{L}$ für das frei Maxwellfeld ist damit bestätigt.

4. Lagrangetech mit f. wechselwirkende Schrödinger- und Maxwellfeld

bisheriges $\mathcal{L}$ reproduziert als $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_M$ die freien Felder ohne WW.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{WW}$$

Der Wechselwirkungsterm wird folgendermaßen erzeugt:

WW mit Potential

1) $T_{kin} \rightarrow T_{kin} - V$

$$V = q\phi + U$$

elektrische Feldarbeit
(potentielle Energie
einer Ladung)

Potentialtöpfe
ohne em. Feld
z.B. Quantenfilme
Quantenpunkte

2) $\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$

wenn Vektorpotential an Ladung anliegt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m}\underset{2)}{\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + q\vec{A}\right)}\psi^*\underset{2)}{\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)}\psi - \psi^*\underset{1)}{(q\phi + u)}\psi$$

$$- \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*_{/t}\psi - \psi^*\psi_{/t}\right)$$

$$+ \frac{\varepsilon_0}{2}\left((\nabla\phi)^2 + 2\vec{\nabla}\phi\cdot\dot{\vec{A}} + (\partial_t\vec{A})^2\right)$$

$$- \frac{1}{2\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)^2$$

Das ist die Lagrangefunktion für Ladungsträger ψ der Ladung q im elektromagnetische Feld $(\phi, \vec{A})$

Man muß noch zeigen, daß die Bewegungsgl. (Schrödingergl., Maxwellgl.) stimmen:

(i) Schrödingerfeld

$$i\hbar \partial_t \psi = \left[\frac{(p - q\vec{A})^2}{2m} + (q\phi + U) \right] \psi$$

Maxwellfelder

(ii) $\phi = ?$

$$\Delta \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{1}{\varepsilon_0} - q \psi^* \psi$$

$$\Delta \phi = - \frac{q \psi^* \psi}{\varepsilon_0} \quad \checkmark$$

$$\rho = q \underbrace{\psi^*(r,t)\, \psi(r,t)}_{\text{Aufenthaltswahrsch. - Dichte}}$$

(iii) $\underbrace{-\Box \vec{A}}_{\text{hatten wir schon}} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}_L + \mu_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{A}}$

muß dabei sein $\neq 0$ denn in Materie

durch WW $\neq 0$

$$-\Box \vec{A} = \mu_0 \frac{q}{2m}\left\{\psi^*(\vec{p} - q\vec{A})\psi + \text{c.c.}\right\} + \varepsilon_0 \partial_t (-\nabla\phi)$$

aus der E-Dynamik $\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_T$

$$\vec{j} = \frac{q}{2m}\left(\psi^*(\vec{p} - q\vec{A})\psi + \text{c.c.}\right)$$

um $\vec{j}_T$ zu bekommen:

$$\varepsilon_0 \partial_t(-\nabla\phi) = -\frac{\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\partial_t \vec{\nabla}\int \frac{d^3r'\,\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$= \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

(mit Kontinuität:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \dot{\rho} = 0 \,)$$

$$\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_T$$

(nach dem Helmholtz theorem)