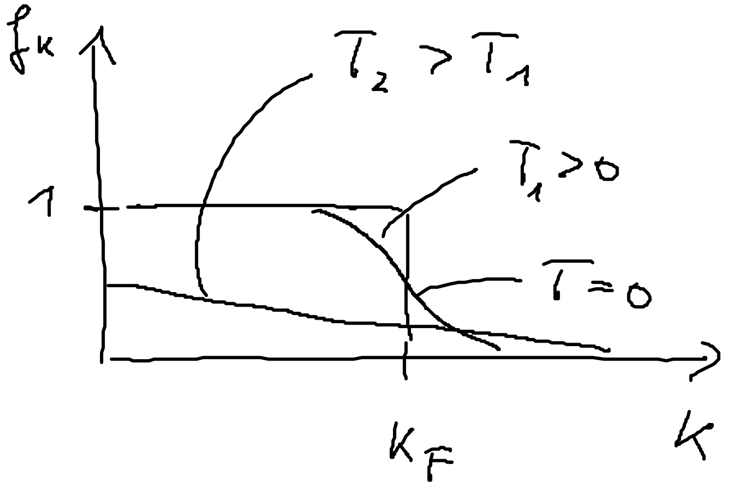
Diskussion der Dispersionsrelation $\omega = \omega(q)$ des Elektronengases

$$1 = V_Q \sum_{k,s} \frac{f_{k-Q}^s - f_k^s}{\hbar\omega + (\tilde{\varepsilon}_{k-Q\,s} - \tilde{\varepsilon}_{k\,s})} \qquad f_k^s = \langle a_{ks}^+ a_{ks} \rangle$$

f_k : Fermifunktionen (siehe statistische Physik)



f_k : Wahrscheinlichkeit, einen 1-Teilchenzustand besetzt vorzufinden, wenn man nachsieht

4.3 Die kollektive Plasmaschwingung

betrachten langwellige Anregungen $Q \to 0 \quad \sim \frac{2\pi}{\lambda} \to 0$

$\lambda \to \infty$

(i) $\omega(Q=0) = \omega_{pe}$

(ii) $\underline{\varepsilon_{k-Q}} - \varepsilon_k = \underline{\frac{\hbar^2}{2m}(k^2 - 2\vec{k}\cdot\vec{Q} + Q^2)} - \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \qquad \to 0 \quad (Q \to 0)$

$= - \underline{\vec{k}\cdot\vec{Q}\,\hbar^2}$

$\underline{\quad m \quad}$

(iii) $f_{k-Q} - f_k = \underline{f_k} - \vec{Q}\cdot\nabla_k f_k - \underline{f_k} = -\vec{Q}\cdot\nabla_k f_k$

Einsetzen in Dispersionsrelation:

$$1 = V_Q \sum_k \frac{-\vec{Q}\cdot\nabla_k f_k}{\hbar\omega_{pl} - \frac{\hbar^2 \vec{Q}\cdot\vec{k}}{m}} = \frac{V_Q}{\hbar\omega_{pl}} \sum_k \sum_\alpha -Q^\alpha \cdot \overbrace{\nabla_k^\alpha}^{=\partial_{k_\alpha}} f_k \left(1 + \frac{\vec{Q}\cdot\vec{k}\,\hbar^2}{m\,\omega_{pl}\,\hbar}\right)$$

(Spin mit reinnehmen) $\sum_k \hat{=} \sum_k \cdot 2$

Komponente des Skalarprodukts

$$\sum_{\alpha,k} Q^\alpha \nabla_k^\alpha f_k = 0, \text{ weil } \underbrace{\int}_{\text{symm.}} \text{ unsymmetrisch}$$

symmetrische Funktion in $|\vec{k}| = k$ (siehe oben)

$$1 = -\frac{V_Q}{m\,\omega_{pl}^2} \sum_{k,\alpha} Q^\alpha \nabla_k^\alpha f_k \; \vec{Q}\cdot\vec{k} \neq 0$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{partielle Integration} \\ \sum_k \to \int d^3k \end{array} \right|$$

$$1 = \frac{V_Q}{m\omega_{pl}^2}\sum_{k\alpha} Q^{\alpha} f_k Q^{\alpha} = \frac{e^2}{Q^2 V \varepsilon_0} N \frac{Q^2}{m\omega_{pl}^2}$$

$$\boxed{\longrightarrow \omega_{pl} = \left(\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m}\right)^{1/2} \qquad n_0 = \frac{N}{V}}$$

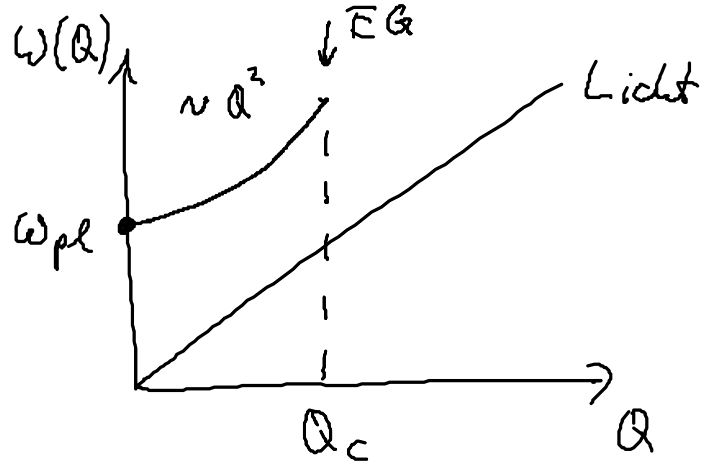
Für langwellige Anregungen $e^{i\underset{\text{klein}}{\vec{Q}}\cdot\vec{r} - i\underset{\omega_{pl}}{\omega} t}$ gilt

$\omega(Q=0) = \Omega_{pl}$, also die klassische Plasmafrequenz.

Die Plasmafrequenz beschreibt . kollektive Oszillationen des Elektronengas (alle El. machen mit) mit einer Frequenz.

Für die Entwicklung für höhere Q ergibt sich:

$$\omega(Q) = \omega_{pl} + \alpha_0 Q^2, \quad \alpha_0 - \text{Konstante}$$



Entwicklung geht bis zu Q_c,
danach andere Lösung.

4.4. Einteilchenanregungen des Elektronengases

in Dispersionsrelation $\exists$:

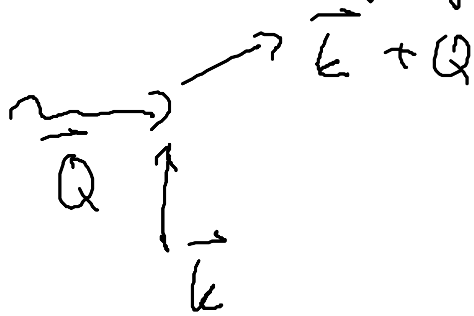
$$\underbrace{\sum_k \frac{f_{k-Q}-f_k}{\hbar\omega+\varepsilon_{k-Q}-\varepsilon_k}}_{\text{suche nach den dominanten Beiträgen:}} = \sum_k f_k \left(\frac{1}{\hbar\omega+\varepsilon_k-\varepsilon_{k+Q}} - \frac{1}{\hbar\omega+\varepsilon_{k+Q}-\varepsilon_k}\right)$$

$$k \to k+Q \qquad \vec{Q} \to -\vec{Q}$$

Nenner sollen verschwinden!

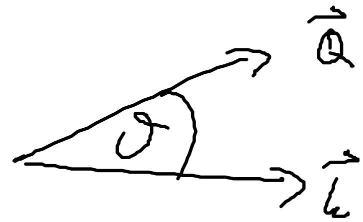
$$\hbar\omega(Q) = \pm\left(\varepsilon_{k+Q}-\varepsilon_k\right) =$$

Bedingg. für weitere Anregungen des El-Gases:
die Energiestruktur sagt uns daß es um 1 Teilchenanregungen geht:



→ viele k mögl. → viele Frequenzen mögl.

$$\hbar\omega(Q) = \pm \frac{k \cdot Q \hbar^2}{m}\cos\vartheta + \frac{\hbar^2 Q^2}{2m}$$



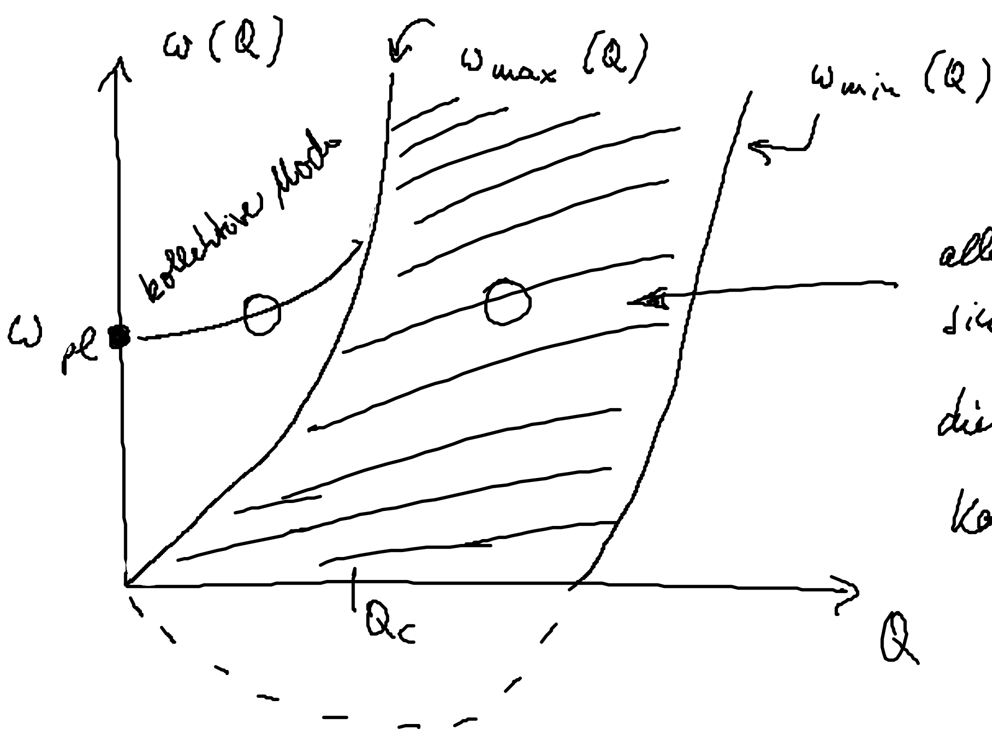
diese Formel enthält 2 Grenzfälle:

$$\cos\vartheta = 1 \rightarrow \hbar\omega_{max}(Q) = \frac{\hbar^2 k Q}{m} + \frac{\hbar^2 Q^2}{2m}$$

$$\cos\vartheta = -1 \rightarrow \hbar\omega_{min}(Q) = -\frac{\hbar^2 k Q}{m} + \frac{\hbar^2 Q^2}{2m}$$

größtmögl. $k = k_F$

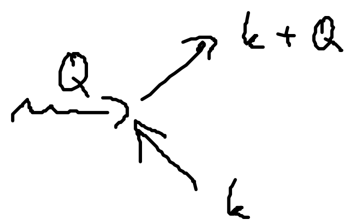
4.5 Gesamtdispersion der Plasmonen



alle mögl. Frequenzen sind mögl., liegen so dicht, man spricht vom Kontinuum der Einteilchenanregungen

Plasmonen: sind Quasiteilchen des Elektronengases, sind charakterisiert durch die Dispersionsrelation $\omega = \omega(Q)$

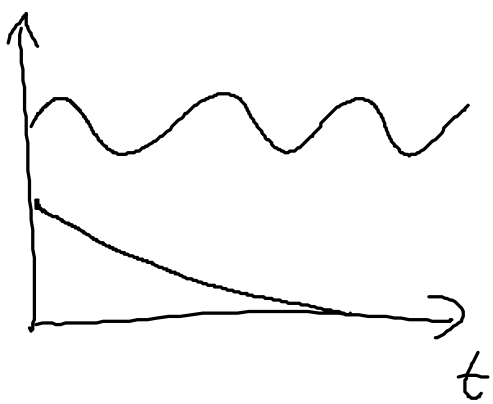
Es existieren sowohl Einteilchenanregungen:



$\Longrightarrow \omega(Q)$

und es existiert eine kollektive Mode $\omega = \omega_{pl} + \alpha_0 Q^2$ (Plasmonen im „engeren" Sinn)

Wenn $Q \to Q_c$ von unten, so zerfällt die kollektive Mode in Einteilchenanregungen (Landaudämpfung)



ω_{pl} (kollektive Mode)

$\sum_{\alpha k} e^{i\omega_{\alpha k} t} \sim \frac{1}{t}$

(Einteilchenanregg.)

5. Dielektrische Eigenschaften des Elektronengases

5.1. Dielektrische Funktion

$\vec{D}_Q(\omega) = \varepsilon_0 \, \underline{\varepsilon_Q(\omega)} \, \vec{E}_Q(\omega)$ – allgemeinster Ansatz (linear) für Materialantwort in E-Dynamik

$\Downarrow$

kann man diese dielektrische Funktion bestimmen?

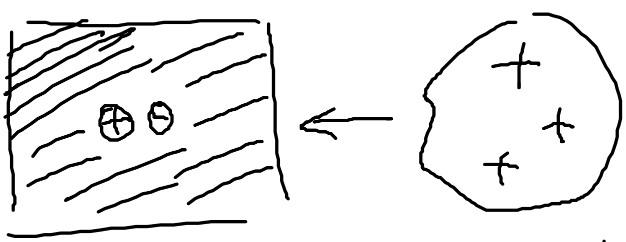
(wichtig: Absorption, Brechung ...)

mikroskopisches $\underline{H}$ $\longrightarrow$ makroskopische $\varepsilon_Q(\omega)$

$\uparrow$

?

Elektronengas



verzerrt Ladungen $\longleftarrow$ externe Ladung

$$\rho_Q(\omega) \Longleftarrow \rho_Q^{ext}(\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_Q(\omega)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho^{ext}(r,t) + \rho^{ind}(r,t) \right)$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho^{ext}(r,t)}$$

$$i \vec{Q} \cdot \vec{E}_Q(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho_Q^{ext}(\omega) + \rho_Q^{ind}(\omega) \right)$$

$$\underline{i \vec{Q} \cdot \vec{D}_Q(\omega) = \rho_Q^{ext}(\omega)}$$

$\varepsilon_Q(\omega)$ finden :

Antwortfunktion γ_Q

$$i\vec{Q}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_Q^{ext}(\omega) + \underline{\gamma_Q\,\rho_Q^{ext}(\omega)}\right)$$

$$= \frac{i\vec{Q}\cdot\vec{D}_Q}{\varepsilon_0\,\varepsilon_Q} = \frac{1}{\varepsilon_0\,\varepsilon_Q}\,\rho_Q^{ext}(\omega)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_Q} = 1 + \gamma_Q}$$

Wenn γ_Q bekannt, so kann ε_Q bestimmt werden

γ_Q aus $\rho^{ind} = \rho^{ind}(\rho^{ext})$

d.h. mache Heisenberggl. f. induzierte Ladung als Funktion der externen :

$\rho^{ind} \equiv \rho_Q(\omega)$, $\underline{H}_{el-gas} \to \underline{H}_{elgas} + \underline{H}_{ext}$

dann $\rho_Q(t) \to$ Bewegungsgl. bestimmt

$$H_{ext} = \phi_{ext}(r) \longrightarrow \underline{H}_{ext} = \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ s_1 s_2}} \langle k_1 s_1 | \phi_{ext}(r) | k_2 s_2 \rangle$$

$$a^+_{k_1 s_1} \; a_{k_2 s_2}$$

potential der externen Ladungsverteilung

$$\Delta \phi_{ext} = - \frac{\rho_{ext}}{\varepsilon_0}$$

von außen vorgegeben

$$\underline{H}_{ext} = \sum_{k_1 k_2 s} \frac{1}{V} e^{-i(k_1 - k_2) r} \phi_{ext}(r) \quad , \; Q = k_1 - k_2$$

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k$$

$$= \sum_{k, Q, s} \phi_Q^{ext} \; a^+_{k-Q\, s} \; a_{k\, s}$$

$$\frac{1}{V} \int d^3 r \; e^{i \vec{Q} \vec{r}} \phi^{ext}(r) = \phi_Q^{ext}$$

$$\Delta \phi^{ext} = - \frac{\rho^{ext}}{\varepsilon_0} \xrightarrow[FT]{} - Q^2 \phi_Q^{ext} = - \frac{\rho_Q^{ext}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\phi_Q^{ext} = \frac{\rho_Q^{ext}}{Q^2 \varepsilon_0}}$$

Ziel: aus $\underline{H} = \underline{H}_{el\,gas} + \underline{H}_{ext}$

über $\| \; -i\hbar\,\partial_t \, a^+_{k-Q\,s} a_{k\,s} = \left[H, \, a^+_{k-Q\,s} a_{k\,s} \right]$

und $\rho_Q = \sum_k a^+_{k-Q\,s} a_{k\,s}$

$$\rho_Q = \gamma_Q \, \rho_Q^{ext}$$

aus $\rho_Q \to \gamma_Q \to \varepsilon_Q$

$\| \; \langle a^+_{k-Q\,s} a_{k\,s} \rangle = \sigma^{ss}_{k-Q\,k}$

nach Berechnen der HBBgl. findet man:

$$-i\hbar\,\partial_t \, \sigma^{ss}_{k-Q\,k} = \left(\varepsilon_{k-Q\,s} - \varepsilon_{k\,s} \right) \sigma^{ss}_{k-Q\,k}$$

$$+ V_Q \left(\sigma^{ss}_{kk} - \sigma^{ss}_{k-Q\,k-Q} \right) \left(\rho_Q + \underline{\underline{\rho_Q^{ext}}} \right)$$

durch extern Ladung erzeugt.

neu!

Fourier trafo, umstellen:

$$\boxed{\overbrace{\sum_k \sigma^{ss}_{k-Q\,k}}^{=\rho_Q} = V_Q\left(\rho_Q + \rho_Q^{ext}\right)\cdot P_Q}$$

umstellen

$$P_Q = \sum_{ks} \frac{\sigma^{ss}_{kk} - \sigma^{ss}_{k-Q\,k-Q}}{-\hbar\omega - \left(\varepsilon_{k-Q\,s} - \varepsilon_{k\,s}\right)}$$

$$\rho_Q = \frac{V_Q P_Q \rho_Q^{ext}}{1 - V_Q P_Q} = \chi_Q \, \rho_Q^{ext}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_Q} = 1 + \chi_Q$$

$$\varepsilon_Q = \frac{1}{1+\chi_Q} = \frac{1}{1 + \frac{V_Q P_Q}{1 - V_Q P_Q}} = 1 - V_Q P_Q$$

$$\varepsilon_Q = 1 - V_Q \sum_{k,s} \frac{\sigma^{ss}_{k-Q\,k-Q} - \sigma^{ss}_{kk}}{\hbar\omega + \left(\varepsilon_{k-Q\,s} - \varepsilon_{k\,s}\right)}$$

Dielektrische Funktion des

Elektronengases.