Dynam. Feldgleichungen:

(i) Statik als Grenzfall

(ii) linear in $\underline{E}$ u. $\underline{B}$

1. Ordn. in t

$$\begin{rcases} \underline{\nabla}\times\underline{E} = \cancel{a_1\dot{\underline{E}}} + b_1\dot{\underline{B}} \\ \underline{\nabla}\times\underline{B} - \mu_0\underline{j} = a_2\dot{\underline{E}} + \cancel{b_2\dot{\underline{B}}} \end{rcases}$$

6 Gln. legen $\underline{E}, \underline{B}$ für $t>0$ fest

—

$$\begin{rcases} \epsilon_0\underline{\nabla}\cdot\underline{E} - \rho = 0 \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \end{rcases}$$

2 skalare Gln.

(iii) TCP-Invarianz

T_g oder P_g $\Longrightarrow$ $a_1 = 0$

T_u oder P_u $\Longrightarrow$ $b_2 = 0$

(iv) Ladungserhaltung

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left[\epsilon_0\underline{\nabla}\cdot\underline{E} - \rho\right] = \epsilon_0\underline{\nabla}\cdot\dot{\underline{E}} - \dot{\rho}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{a_2}\underline{\nabla}\cdot\left\{\underline{\nabla}\times\underline{B} - \mu_0\underline{j}\right\} - \dot{\rho}$$

$$0 = -\frac{\epsilon_0\mu_0}{a_2}\underline{\nabla}\cdot\underline{j} - \dot{\rho}$$

Kontin.gl. $\quad 0 = \underline{\nabla}\cdot\underline{j} + \dot{\rho}$

$\Longrightarrow \quad a_2 = \varepsilon_0 \mu_0 \quad \Longrightarrow$ Verschiebungsstromdichte $\varepsilon_0 \dot{\underline{E}}$

(v) Lorentzkraft

$$\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

soll aus einem Extremal-Prinzip (Hamilton'sches Prinzip) ableitbar sein.

Suche Lagrange-Fkt. $L(\underline{r}, \underline{v}, t)$, so dass die Lagrange-Gln.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0 \qquad k = 1,2,3$$

die (nichtrelativist.) Bewegungsgln. ergibt:

$$\boxed{L = \frac{m}{2} v^2 + q\left[\underline{v} \cdot \underline{A}(\underline{r},t) - \phi(\underline{r},t)\right]}$$

Tatsächlich

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial v_k} = m v_k + q A_k(\underline{r},t) =$$ kanon. Impuls

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} = m \ddot{x}_k + q \frac{d}{dt} A_k(\underline{r},t)$$

totale Zeitabl. längs einer Bahn $\underline{r}(t)$

$$= m \ddot{x}_k + q \left(\frac{\partial}{\partial t} A_k + \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \dot{x}_l \right)$$

$$= m \ddot{x}_k + q \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \right) A_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = q \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\underline{v} \cdot \underline{A}) - \frac{\partial}{\partial x_k} \phi \right]$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = m \ddot{x}_k + q \frac{\partial}{\partial t} A_k + q \underbrace{\left[(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) A_k - \frac{\partial}{\partial x_k} (\underline{v} \cdot \underline{A}) \right]}_{-\left[\underset{a}{\underline{v}} \times (\underset{b}{\underline{\nabla}} \times \underset{c}{\underline{A}})\right]_k}$$

$$+ q \frac{\partial}{\partial x_k} \phi$$

$$0 = m\ddot{\underline{r}} + q\left[\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} + \underline{\nabla}\phi - \underline{v}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})\right]$$

$$q\left[-\underline{E} - \underline{v}\times\underline{B}\right]$$ Lorentzkraft

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t) - \underline{\nabla}\phi(\underline{r},t) \\ \underline{B}(\underline{r},t) &= \underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r},t) \end{aligned}}$$

$$\Longrightarrow \underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{A}}_{\underline{B}} - \underbrace{\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\phi)}_{0} \overset{!}{=} b_1\dot{\underline{B}}$$

Also $b_1 = -1$

Vollständige Maxwell-Gln. im Vakuum :

mit den neuen Feldgrößen

$\underline{D}(\underline{r},t) := \epsilon_0\underline{E}(\underline{r},t)$ „dielektr. Verschiebung"

$\underline{H}(\underline{r},t) := \frac{1}{\mu_0}\underline{B}(\underline{r},t)$ „Magnetfeld"

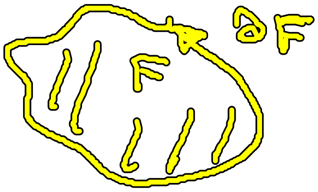
ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \underline{\nabla}\times\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} &= 0 \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} \underline{\nabla}\cdot\underline{D} &= \rho \\ \underline{\nabla}\times\underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} &= \underline{j} \end{aligned}\right\} \end{aligned}}$$

homog. Gln.
Wechselwirkung einer Probelad.
mit geg. Feldern $\underline{E}$, $\underline{B}$

inhomog. Gln.:
Erzeugung der Felder
$\underline{D}$, $\underline{H}$ durch geg.
Ladungen u. Ströme

3.3 Induktionsgesetz



Integration von

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$$

über Fläche F (ortsfest!)

$$\int d\underline{f}\ \mathrm{rot}\,\underline{E} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{F\ (\text{ortsfest!})} d\underline{f}\cdot\underline{B}$$

$$\boxed{\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)}$$

mit dem magn. Fluss $\Phi := \int_F d\underline{f}\cdot\overset{\mathrm{rot}\,\underline{A}}{\underline{B}} = \oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{A}$

Φ hängt nur vom Rand ∂F von F ab:

$$0 \overset{!}{=} \underline{\int_F d\underline{f}\cdot\underline{B}} - \underline{\int_{F'} d\underline{f}\cdot\underline{B}} = \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{B} \overset{\text{gauß}}{=} \int_V d^3r\ \underbrace{\mathrm{div}\,\underline{B}}_{0}$$

Potenzialdifferenz bei 1 Umlauf um δF

$$\Delta\phi := -\oint_{\partial F} d\underline{s}\ \underline{E}$$

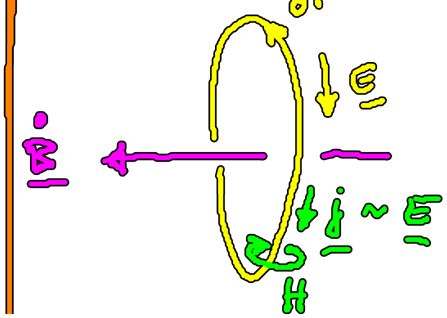
induzierte Spannung

(Wirbelfeld)

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial t}\Phi}$$

Faraday'sches Induktionsgesetz

Lenz'sche Regel:



$\dot{\underline{B}} \Rightarrow \underline{E}$ induziert ($\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$)

$\underline{E} \Rightarrow$ Ladungsbeweg. $\Rightarrow \underline{j}\sim\underline{E}$

$\underline{j} \Rightarrow \underline{H}$ erzeugt ($\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j}$)

Also $\bar{H}$ ist $\dot{\underline{B}}$ entgegengerichtet !

Maxwell-Gln. in Integralform

$$\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi$$

Zirkulation des el. Feldes entlang einer geschlossenen Linie $= -\frac{\partial}{\partial t}\Phi$, $\Phi = \int_F d\underline{f}\cdot\underline{B}$ magn. Fluss

$$\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{B} = 0$$

Fluss des magn. Feldes durch geschlossene Fläche $= 0$

$$\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

Fluss des el. Feldes durch ∂V = eingeschlossene Ladung Q/ε_0

$$\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{H} = \int_F d\underline{f}\cdot\dot{\underline{D}} + I$$

Zirkulation des magn. Feldes entlang einer geschloss. Linie = (diel. Verschieb.strom $\int d\underline{f}\cdot\dot{\underline{D}}$ + Konvektionsstrom $I = \int d\underline{f}\cdot\underline{j}$)

3.4 Energiebilanz

Die Maxwell-Gln. enthalten die Kontin.gl. für die el. Ladung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\underline{j} = 0 \qquad (\text{Ladungserh.})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \underline{\nabla}\,\underline{j} = \underline{\nabla}\cdot\left(\dot{\underline{D}} + \underline{j}\right) = \underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla}\times\underline{H}\right) \equiv 0 \right)$$

<u>Frage</u>: Enthalten die Maxwell-Gln. weitere <u>Erhaltungssätze</u> für „extensiv" physik. Observable, z. B. Energie, Impuls, Drehimpuls?

(„Extensiv" : additiv bei Systemzusammensetzung

„intensiv" : nicht additiv, z. B. Temp.)