

Energiebilanz:

Energie transport durch das el. magn. Feld:

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0 \quad | \cdot \underline{H}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \underline{j} \quad | \cdot \underline{E}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{H} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{H})}_{\substack{\underline{\nabla} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) \\ \underline{H} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{E}) \\ \underline{E} \cdot (\underline{H} \times \underline{\nabla}) \\ \dots}} + \underbrace{\underline{H} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}}_{\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}} + \underbrace{\underline{E} \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}}_{\epsilon_0 \underline{E} \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}} = - \underline{j} \cdot \underline{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2 \right) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} = - \underline{j} \cdot \underline{E}}$$

Kontinuitätsgl.

= Bilanzgl. für
Energie transport

mit $w := \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2 = \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H})$ Energiedichte
 El. statik Magnetostatik

$$\underline{S} := \underline{E} \times \underline{H}$$

Energiedichte des el. magn. Feldes
 (Poynting-Vektor)

$\sigma = - \underline{j} \cdot \underline{E}$ Quelldichte der Feldenergie
(Leistungsdichte)

$\underline{j} \cdot \underline{E} > 0$ Abnahme }
 $\underline{j} \cdot \underline{E} < 0$ Zunahme } der Feldenergie bei (\underline{r}, t)

Beispiel: Beschleunigung von Teilchen durch die Felder $\underline{E}, \underline{B}$:

Kraft auf Ladung q : $\underline{F} = q (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Kraftdichte $\underline{f} = \rho (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Leistungsdichte der Felder auf die Ladungen ρ :

$$\underline{f} \cdot \underline{v} = \underbrace{\rho \underline{v} \cdot \underline{E}}_{\underline{j} \cdot \underline{E}} + \underbrace{\rho \underline{v} (\underline{v} \times \underline{B})}_0 = \underline{j} \cdot \underline{E} \quad \text{vom Feld auf Ladungen übertragen}$$

(= Verlustdichte

Also ist die Feldenergie keine Erhaltungsgröße! der Feldenergie)

1. Beispiel: Ohm'sche Gesetz

$$\underline{j} = \sigma \underline{E} \quad \text{mit konstanter Leitfähigkeit } \sigma > 0$$

(phänomenolog. Materialgesetz!)

gilt in Metallen u. Halbleitern für hinreichend kleine Felder \underline{E})

$$\Rightarrow \text{Energiebilanz } \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{S} = -\sigma \underline{E}^2 < 0$$

d.h. stets Verlust von Feldenergie

(Konsequenz des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik)

Im Gegensatz zur Elektrodynamik der Felder ist das Ohm'sche Gesetz nicht zeitumkehrinvariant

$$t \rightarrow -t$$

$$\underline{j} \rightarrow -\underline{j}$$

$$\text{aber } \underline{E} \rightarrow \underline{E}$$

$\sigma \underline{E}^2$ wird als Joule'sche Wärme im Leiter dissipiert (Irreversibilität).

2. Beispiel: Antennenabstrahlung (offenes System)

\underline{j} in der metall. Antenne ist

dem Wechselfeld \underline{E} außerhalb

entgegengesetzt $\Rightarrow \underline{j} \cdot \underline{E} < 0$

\Rightarrow Energiegewinn des Feldes

3.5 Impulsbilanz

Aus den Maxwell-Gln. folgt eine weitere Bilanzgl. für den Impulstransport durch das el. magn. Feld:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{D} \times \underline{B}) = \underbrace{\underline{D} \times \underline{B}}_{\underline{\nabla} \times \underline{H} - \underline{j}} + \underbrace{\underline{D} \times \underline{B}}_{-\underline{\nabla} \times \underline{E}}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times (\underline{\nabla} \times \underline{B}) - \underline{j} \times \underline{B} - \epsilon_0 \underline{E} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E})$$

Es gilt die Vektorumformung

$$\underline{B} \times (\underline{\nabla} \times \underline{B}) = \frac{1}{2} \underline{\nabla} (\underline{B} \cdot \underline{B}) - (\underline{B} \cdot \underline{\nabla}) \underline{B}$$

$$= \underline{\nabla} \cdot \left\{ \underline{1} \frac{1}{2} (\underline{B} \cdot \underline{B}) - \underline{B} \otimes \underline{B} \right\} + \underline{B} (\underline{\nabla} \cdot \underline{B})$$

wobei: $\underline{1}$ Einheitsstensor 2. Stufe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{B} \otimes \underline{B}$ das Tensorprodukt (dyad. Produkt)

und $\underline{\nabla} \cdot \{ \dots \}$ die Divergenz eines Tensors \underline{T} 2. Stufe

(In Komponenten gilt $(\underline{\nabla} \cdot \underline{T})_\beta = \partial_\alpha T_{\alpha\beta}$)

$$\underbrace{\partial_\alpha \delta_{\alpha\beta}}_{\partial_\beta} \frac{1}{2} (\underline{B} \cdot \underline{B})$$

$$\underbrace{\partial_\alpha B_\alpha B_\beta}_{(\underline{\nabla} \cdot \underline{B}) \underline{B}} = \underline{B} (\underline{\nabla} \cdot \underline{B}) + (\underline{B} \cdot \underline{\nabla}) \underline{B}$$

Analog: $\underline{E} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E}) = \underline{\nabla} \cdot \left\{ \underline{1} \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{E}) - \underline{E} \otimes \underline{E} \right\} + \underline{E} (\underline{\nabla} \cdot \underline{E})$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\underline{D} \times \underline{B}) + \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \left\{ \underline{1} \frac{1}{2} (\epsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \underline{B}^2) - \epsilon_0 \underline{E} \otimes \underline{E} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \otimes \underline{B} \right\}}_{\underline{T}}$$

$$= - \underbrace{(\rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})}_{\underline{f}}$$

Kraftdichte \underline{f} , die von den Feldern auf Ladungen ρ mit Stromdichte $\underline{j} = \rho \underline{v}$ ausgeübt werden.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \underline{g} + \nabla \cdot \underline{T} = -(\rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{E})}$$

Bilanzgleichung für Impulstransport

mit

$$\underline{g} := \underline{D} \times \underline{B} \quad \text{Impulsdichte des Feldes}$$

$$(\text{Nach Newton } \frac{d}{dt} \underline{p} = \underline{F} \Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{g} = \underline{f})$$

$$\underline{T} := \underline{1} \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) - \underline{E} \otimes \underline{D} - \underline{B} \otimes \underline{H}$$

Impulsstromdichte-Tensor des Feldes
(Maxwell'scher Spannungstensor)

in Komponenten:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) - E_{\alpha} D_{\beta} - B_{\alpha} H_{\beta}$$

(Stromdichte in α -Richtung der β -Komponente)
der Impulsdichte

$$\text{Sp } \underline{T} = T_{\alpha\alpha} = \frac{3}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) \xrightarrow{\text{Stromdichte}} \underline{g}$$

$$= w (\text{Energiedichte})$$

$$\underline{T} \text{ ist } \underline{\text{symmetrisch}} : T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} g_{\beta} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} T_{\alpha\beta} = -f_{\beta}}$$

Impulsaustausch zwischen Feld und geladenem Teilchen

Bem.: Eine analoge Bilanzgl. gilt für die Drehimpulsdichte des Feldes, sie beschreibt Drehimpulsaustausch zwischen Feld und geladenem Teilchen.