Freie Wellengln.: $\boxed{\begin{array}{l} \Box \phi = 0 \\ \Box \underline{A} = 0 \end{array}}$

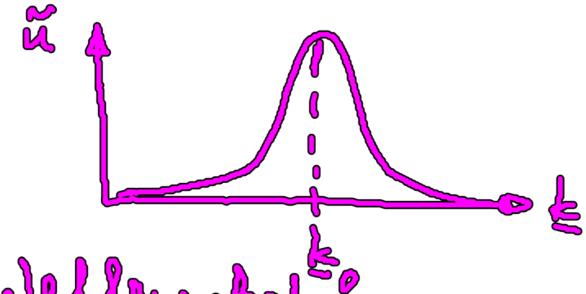
spezielle Lösung: <u>harmonische ebene Welle</u>

$$u(\underline{r},t) = \underbrace{\tilde{u}(\underline{k})}_{\text{komplexe Amplitude}} e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} \qquad \omega = c|\underline{k}|$$

Lineare Superposition (für allg. Dispersionsrel. $\omega(\underline{k})$):

$$u(\underline{r},t) = \int d^3k\, \tilde{u}(\underline{k}) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega(\underline{k})t)}$$

Sei $\tilde{u}(\underline{k})$ um $\underline{k}_0$ lokalisiert:



$\Rightarrow$ <u>Wellenpaket</u>

Taylor-Entwicklung der Phase um $\underline{k}_0$

$$\omega(\underline{k}) \approx \underbrace{\omega(\underline{k}_0)}_{\omega_0} + \underbrace{(\underline{k}-\underline{k}_0)}_{\tilde{\underline{k}}} \underbrace{\nabla_k \omega(k)\Big|_{\underline{k}=\underline{k}_0}}_{\underline{v}_g} + \ldots$$

$$= \omega_0 + (\underline{k}-\underline{k}_0)\cdot\underline{v}_g$$

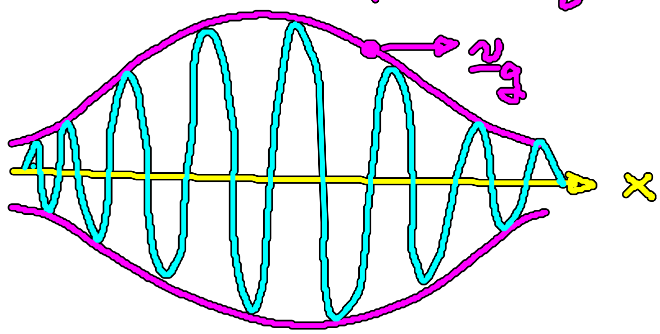
ergibt

$$u(\underline{r},t) = e^{i(\underline{k}_0\underline{r} - \omega_0 t)} \int d^3\tilde{k}\, \tilde{u}(\underline{k}_0+\tilde{\underline{k}}) e^{i\tilde{\underline{k}}(\underline{r} - \underline{v}_g t)}$$

Trägerwelle mit Phasengeschw. $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$

Einhüllende, Max. bewegt sich mit Gruppengeschwind.

$$\boxed{\underline{v}_g = \nabla_k \omega(k)}$$



Dispersionsrelation $\omega(\underline{k})$:

el. magn. Welle im Vakuum $\omega(\underline{k}) = c|\underline{k}|$

$$\Rightarrow \underline{v}_g = c\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} = \underline{v}_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\,\underline{n}$$

keine Dispersion (d.h. kein Zerfließen)!

(im Gegensatz zu el. magn. in dispersiven Medien oder qm. Materiewellen im Vakuum $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$)

Polarisation

Betrachte el. magn. Welle $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$

$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$

$\underline{E}$ heißt transversal, falls $\nabla\cdot\underline{E} = 0$ (quellenfrei)

$$\Rightarrow i\underline{k}\cdot\underline{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{E} \perp \underline{k}}$$

$\underline{E}$ heißt longitudinal, falls $\nabla\times\underline{E} = 0$ (wirbelfrei)

$$\Rightarrow i\underline{k}\times\underline{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{E} \parallel \underline{k}}$$

Für $\rho = 0$ ist wegen $\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 0$: $\underline{E}(\underline{r},t)$ transversal

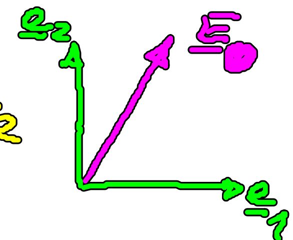
stets wegen $\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0$: $\underline{B}(\underline{r},t)$ transversal

Weiter folgt aus $\underline{\nabla}\times\underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$

$$\Big(i\underline{k}\times\underline{E}_0 - i\underbrace{\omega}_{c|\underline{k}|}\underline{B}_0\Big)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{B}_0 = \frac{1}{c}\,\underline{n}\times\underline{E}_0}$$

$\underline{k}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$: Rechtssystem

Die Richtung von Re$\{\underline{E}_0, \underline{B}_0\}$ legt die Polarisation fest:



Sei $\underline{k} \parallel \underline{e}_3$-Achse, $\underline{E}_0 = E_{01}\underline{e}_1 + E_{02}\underline{e}_2$

mit $E_{0i} = a_i e^{i\delta_i} \in \mathbb{C}$

Phys. Feld: $$E_1(\underline{r},t) = \mathrm{Re}\{a_1 e^{i(\delta_1 + \underbrace{\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t}_{\varphi})}\}$$

$$= a_1\cos(\varphi+\delta_1)$$

$$E_2(\underline{r},t) = a_2\cos(\varphi+\delta_2)$$

Aus $$\frac{E_1}{a_1} = \cos\varphi\cos\delta_1 - \sin\varphi\sin\delta_1$$

$$\frac{E_2}{a_2} = \cos\varphi\cos\delta_2 - \sin\varphi\sin\delta_2$$

läßt sich φ (und somit $\underline{r},t$) eliminieren

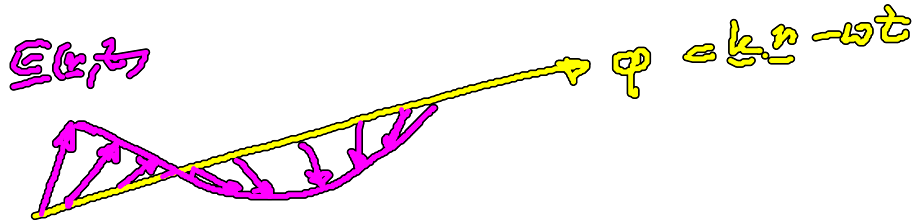
$$\frac{E_1}{a_1}\sin\delta_2 - \frac{E_2}{a_2}\sin\delta_1 = \cos\varphi\,\sin\underbrace{(\delta_2-\delta_1)}_{\delta} \quad (1)$$

$$\frac{E_1}{a_1}\cos\delta_2 - \frac{E_2}{a_2}\cos\delta_1 = \sin\varphi\,\sin\underbrace{(\delta_2-\delta_1)}_{\delta} \quad (2)$$

$$(1)^2+(2)^2 \Longrightarrow \boxed{\left(\frac{E_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{a_2}\right)^2 - 2\,\frac{E_1}{a_1}\frac{E_2}{a_2}\cos\delta = \sin^2\delta}$$

Ellipsengl. für E_1, E_2

$\underline{E}$ läuft als Fkt. von φ auf einer Ellipse $\perp$ $\underline{k}$ um: elliptische Polarisation



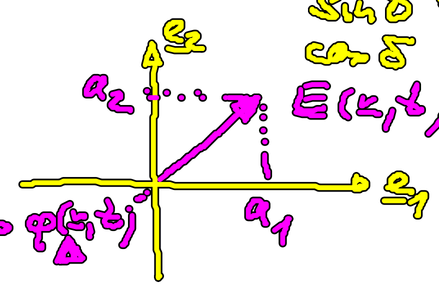
Spezialfälle

(a) linear polarisierte Welle: $\delta_1 = \delta_2 + n\pi$

$\sin\delta = 0$

$\cos\delta = \pm 1$

$$\boxed{\frac{E_1}{a_1} \pm \frac{E_2}{a_2} = 0}$$



gerade: $\underline{E}(x,t) = \underset{\text{reell}}{\underline{E}_0}\cos\varphi(x,t)$

(b) zirkular polarisierte Welle : $a_1 = a_2 \equiv a$

$\delta_1 - \delta_2 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\cos\delta = 0$

$\sin\delta = \pm 1$

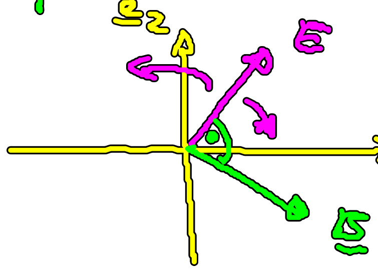
$$\boxed{E_1^2 + E_2^2 = a^2}$$

$\underline{E}$ läuft auf Kreis um

$$\underline{E}(\underline{r},t) = a \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \pm\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$\triangleq$ Überlagerung zweier um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschob. lin. polaris. Wellen

links- / rechts-zirkular polarisiert



Energiedichte der el. magn. Welle :

Sei $\underline{E}_0$ reell $\Longrightarrow$ $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$

$\underline{B}(\underline{r},t) = \overbrace{\underline{B}_0}^{\frac{1}{c}\underline{n}\times\underline{E}_0} \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$

Energiedichte $w = \frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2$

$= \frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\frac{1}{c^2}\underline{E}^2$ $\qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

$= 2\cdot\frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2$

Energiestromdichte : $\underline{S} = \frac{1}{\mu_0}\underline{E}\times\underline{B}$

$= \frac{1}{c\mu_0}\underline{E}\times(\underline{n}\times\underline{E})$ $\qquad \underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a}\underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a}\underline{b})$

$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2\underline{n}$

$= c\,\underbrace{\varepsilon_0 E^2}_{w}\,\underline{n}$

$= c w \underline{n}$

Erg.: Die Energie wird mit der Lichtgeschw. in Richtung $\underline{n} = \underline{k} / |\underline{k}|$ transportiert.

Kugelwellen: $\underline{E}(\underline{r},t) = \frac{1}{r} E_0 \, e^{i(kr - \omega t)}$

Energie in Kugelschale mit Radius r und Dicke dr:

$$W(r) = 4\pi r^2 dr \cdot \varepsilon_0 \underline{E}^2 = 4\pi r^2 dr \, \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{r^2} \frac{1}{2} = \text{const.}$$

Raum-/Zeitmittel über $\exp\{\;\}$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}$

4.2 Retardierte Potenziale

Aufgabe: Lösung der inhomog. Wellenglg.

$$\boxed{\begin{aligned} \Box \phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \Box \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}}$$

(Lorenz-Eichung)

zu vorgegebenen erzeugenden Quellen $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$
und Randbed. $\phi, \underline{A} \to 0$ für $r \to \infty$