# 4.3 Multipolstrahlung

<u>Ziel</u>: Die retardierten Potenziale sollen für räumlich lokalisierte zeitabh. Ladungs- und Stromverteilungen analog zu den statischen Multipolentwicklungen (§ 1.4, § 2.4) für $r \gg r'$ entwickelt werden.

<u>Vorauss.</u>: Lorenz-Eichung $\dot{\phi} + c^2 \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$

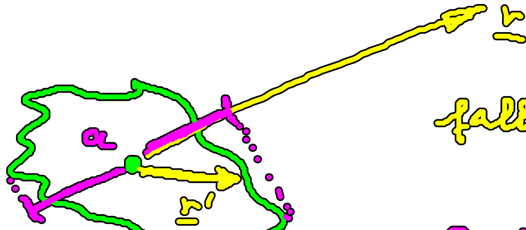
$\Rightarrow$ Aus $\underline{A}(\underline{r},t) \Longrightarrow \phi(\underline{r},t)$, $\underline{E}(\underline{r},t)$, $\underline{B}(\underline{r},t)$

<u>1. Näherung</u>: $\boxed{r \gg a}$ (Ausdehnung der Quelle)

Mit $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}') + \ldots$


$$\underline{A}(\underline{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\underline{r}\cdot\underline{r}') \, \underline{j}(\underline{r}', \overbrace{\;\;}^{t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}})$$

<u>2. Näherung</u>: $t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \approx \underbrace{t - \frac{r}{c}} + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{c\,r} + \ldots$




$=: \tau$

falls $\tau \gg \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{cr} \sim \frac{a}{c}$ (relative Retard. der einzelnen Plätze der Quelle)

$a$ ~ Ausdehnung der Quelle

$\tau$ ~ charakt. Zeit für Änderung von $\underline{j}$

(z.B.: harmon. Erregung $\underline{j} \sim e^{i\omega t}$:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{ck} = \frac{\lambda}{c}$$

$\Rightarrow \boxed{a \ll \lambda}$ Wellenlänge)

$$\Rightarrow \underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \approx \underline{j}\Big(\underline{r}', \underbrace{t-\frac{r}{c}}_{\tau}\Big) + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{cr}\frac{\partial \underline{j}(\underline{r}',\tau)}{\partial\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{A(\underline{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}',\tau) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3r'\, (\underline{r}\cdot\underline{r}')\left(1+\frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\underline{j}(\underline{r}',\tau)}$$

niedrigste Ordnung (verschwindet nicht, da im Gegensatz zu § 2.4 $\underline{\nabla}\cdot\underline{j}' \neq 0$)

Mit $\underline{\nabla}_{r'}\cdot[x_k' \underline{j}] = x_k' \underbrace{\underline{\nabla}_{r'}\cdot\underline{j}(\underline{r}',\tau)}_{-\dot\rho(\underline{r}',\tau)} + j_k$, $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{\nabla}_{r'}\cdot(x_k'\underline{j}) \overset{\text{Gauß}}{=} 0$

folgt

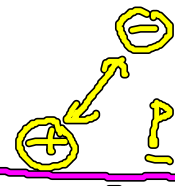
$$\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}',\tau) = \int d^3r'\, \underline{r}'\dot\rho(\underline{r}',\tau) = \dot{\underline{p}}(\tau)$$

mit dem el. Dipolmoment $\underline{p} = \int d^3r'\, \underline{r}'\rho(\underline{r}',\tau)$

$$\boxed{\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$ El. Dipolstrahlung

# Hertz'scher Dipol (H. Hertz 1857 – 1894)

$$\underline{p}(t) = \underline{p}_0 \, e^{-i\omega t}$$




$$\boxed{\begin{aligned} \underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) &= \frac{-i\omega\mu_0 \underline{p}_0}{4\pi} \frac{e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r} \\ &= \frac{-i\omega\mu_0 \underline{p}_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \end{aligned}}$$

Kugelwelle

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\underline{r},t) \overset{\text{Lorenz}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underline{\nabla}\cdot\left\{\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underline{\nabla}\cdot\left\{\frac{1}{r}\underline{p}(\underbrace{t-\tfrac{r}{c}}_{\tau})\right\} + \underbrace{\phi_{stat}(\underline{r})}_{0 \ \text{(OBdA)}}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{p} = \frac{\partial}{\partial \tau}\underline{p} \cdot (\underline{\nabla}\tau)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\underbrace{\frac{1}{cr^2}\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}_{\sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^3}\underline{r}\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}_{\sim \frac{1}{r^2}}\right\}$$

**Grenzfälle:**

(i) Fernzone (Wellenzone): $r \gg \lambda \ (\gg a) \Leftrightarrow \boxed{kr \gg 1}$

$$\boxed{\phi(\underline{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{cr^2}\,\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$$\frac{1}{c}\dot{p} \sim \frac{\omega}{c}p \gg \frac{p}{r} \Leftrightarrow \frac{\omega}{c}r \gg 1$$

(ii) Nahzone (quasistat. Bereich): $\lambda \gg r \ (\gg a) \Leftrightarrow \boxed{kr \ll 1}$

$$\boxed{\phi(\underline{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\,\underline{r}\cdot\underline{p}(t)} - \cancel{\frac{1}{r^3}\frac{r}{c}\,\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}(t)} + \cancel{\frac{1}{cr^2}\,\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}(t)}$$

Retardierung kompensiert $\dot{p}$-Term

instantanes Dipolpot.!

## Felder in Fernfeldnäherung

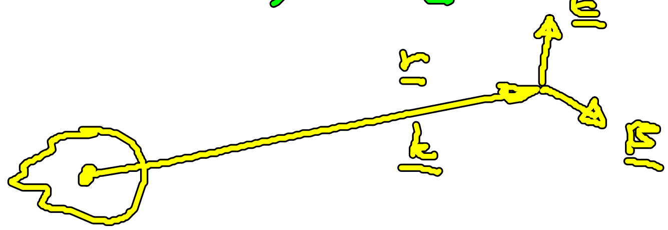
$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{\nabla}\times\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\underline{\nabla}\times\left(\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r^2}\left[\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\underline{\nabla}\phi - \dot{\underline{A}}(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r^3}\left[\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right]\times\underline{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Es gilt: $\underline{B}\times\left(\frac{\underline{r}}{r}\right) = \frac{1}{c}\underline{E}$

Also




$\underline{r}, \underline{E}, \underline{B}$ bilden Rechtssystem!

$\underline{r} \perp \underline{E} \perp \underline{B}$

Ausbreitung wie eine freie Kugelwelle (nur in der Fernzone)

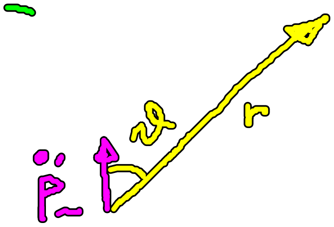
NB: In der Nahzone gilt immer noch $\underline{B}\perp\underline{r}$, aber $\underline{E}$ hat longitud. Komp. $\underline{E}_\parallel \parallel \underline{r}$ neben $\underline{E}_\perp \perp \underline{r}$

## Poynting-Vektor (Energiestromdichte):

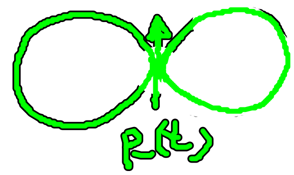
$$\underline{S} = \underline{E}\times\underline{H} = -\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\times\underline{E} = -\frac{c}{\mu_0 r}\underline{B}\times(\underline{B}\times\underline{r})$$

$$= -\frac{c}{\mu_0 r}\left\{\underbrace{(\underline{B}\cdot\underline{r})}_{0}\underline{B} - B^2\underline{r}\right\}$$

$$\approx \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{r^4} \underbrace{\left(\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \times \underline{r}\right)^2}_{|\ddot{\underline{p}}|^2 r^2 \sin^2\vartheta} \frac{1}{r}\underline{r}$$




$$\boxed{\underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\ddot{\underline{p}}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \, \frac{\underline{r}}{r}}$$




$l=1$
$m=0$

Abstrahl-Charakteristik des Hertz'schen Dipols

$\left(\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t} : |\ddot{\underline{p}}|^2 = p_0^2 \omega^4\right)$, stark richtungs-abhängig

NB: Gute Näherung für lineare Antenne