

## 5.2 Magnetisierung

oooooooooooooooo

Mikroskop. Ursache für Magnetisierung der Materie sind mikroskop. Kreisströme bzw. mikroskop. magn. Dipolmomente  $\underline{m}$ :

magn. Dipolmomente  $\underline{m}$ :

(a) Für  $\underline{B} = 0$  vorhandene permanente magn. Momente  $\underline{m}$  werden zur Minimierung der pot. Energie

$$W_{\text{mag}} = - \underline{m} \cdot \underline{B}$$

vorzugsweise (gegen therm. Bewegung)  $\uparrow \uparrow \underline{B}$

orientiert (z.B. Bahn- u. Spinnomente von Elektronen).

→ Paramagnetismus

(b) Durch  $\underline{B}$  können Kreisströme freier oder gebundener Ladungen induziert werden (Faraday-Effekt)

Lenz'sche Regel → Magn.  $\uparrow \downarrow \underline{B}$

→ Diamagnetismus

makroskop. gemittelte Felder

mikroskop. magnet. Dipoldichte:

$$\underline{M}_m(\underline{r}, t) = \sum_i \underline{m}_i(t) \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$$

Mittelung über kleines makroskop. Vol.  $\Delta V$ :

$$\underline{M}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \underline{M}_m(\underline{r} + \underline{s}, t)$$



makroskop. magn. Dipoldichte  $\equiv$  Magnetisierung

Ziel: Zus. hang zwischen der magn. Dipoldichte  $\underline{M}$  u. den effektiven Feldern  $\underline{B}$  in der Materie.

Zeige, dass eine Magnetisierungsstromdichte  $\underline{j}_M$  als "Quelle" der Felder eingeführt werden kann:

$$\nabla \times \underline{B}_M = \mu_0 \underline{j}_M \quad \text{bzw.} \quad \nabla \times \underline{M} = \underline{j}_M$$

eff. Gesamteinduktion (stationär)

$$\underline{B}' = \underline{B} + \underline{B}_M \Rightarrow \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \underline{B}' \right) = \underbrace{\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \right)}_{\underline{j}} + \underline{j}_M$$

Erzeugung durch freie Ströme:

$$\nabla \times \left( \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \underline{B}' - \underline{M}}_{\underline{H}} \right) = \underline{j}$$

Betrachte Vektorpot. der mikroscop. el. und magn. Dipole (§ 4,3):

$$\underline{A}_m(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|} \dot{\underline{p}}_i \left( t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}_i|}{c} \right) + \nabla \times \left( \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|} \underline{m}_i \left( t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}_i|}{c} \right) \right) \right\}$$

el. Dipolmoment                      magn. Dipolmoment

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \dot{\underline{P}}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) + \nabla' \times \left( \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{M}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \right) \right\}$$

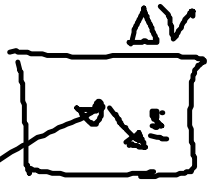
mikr. el. Dipoldichte                      mikr. magn. Dipoldichte

Macrosc. gemitteltes Pot.:

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int d^3s \underline{A}_m(\underline{r}+\underline{s}, t)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \dot{\underline{P}}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) + \nabla' \times \left( \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{M}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \right) \right\}$$

macroscop. Dipoldichte



$$\int d^3r' \nabla' \times \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{M}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \right\} = - \int d^3r' \nabla' \cdot \left\{ \dots \right\}$$

0 (Gauß)

$$+ \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left[ \nabla' \times \underline{M}(\underline{r}', t') \right]_{t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} = t_{ret}}$$

Def. : Magnetisierungsstromdichte

Polarisationsstromdichte

$$\underline{j}_M := \nabla \times \underline{M}$$

$$\underline{j}_P := \frac{\partial}{\partial t} \underline{P}$$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \left\{ \underline{j}(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \underline{j}_p(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \underline{j}_M(\underline{r}', t^{\text{ret}}) \right\}$$

wird durch die Polarisations- u. Magnetisierungsstromdichten in Materie erzeugt.

Es gilt der Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{\dot{P}} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{j}_p$$

$$\boxed{\dot{\rho}_p + \underline{\nabla} \cdot \underline{j}_p = 0} \quad \text{Erhaltung der Polarisationsladung}$$

### 5.3. Maxwell-Gleichungen in Materie

Vollständige Pot. enthalten

- freie Ladungs- u. Stromdichten  $\rho, \underline{j}$
- Polarisations- u. Magnetisierungsbeiträge  $\rho_p, \underline{j}_p, \underline{j}_M$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \left\{ \underline{j}(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \underline{j}_p(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \underline{j}_M(\underline{r}', t^{\text{ret}}) \right\}$$

$$\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \left\{ \rho(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \rho_p(\underline{r}', t^{\text{ret}}) \right\}$$

$\underline{A}, \phi$  sind also Lösungen der inhom. Wellengl.

$$\left. \begin{aligned} \square \underline{A}(\underline{r}, t) &= -\mu_0 (\underline{j} + \underline{j}_p + \underline{j}_M) \\ \square \phi(\underline{r}, t) &= -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p) \end{aligned} \right\} \text{Lorenz-Eichung}$$

Für  $\underline{E}, \underline{B}$  in Materie folgt:

$$\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{A} - \underline{\nabla} \phi$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$\Rightarrow (1) \quad \underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B} \quad \left. \vphantom{\underline{\nabla} \times \underline{E}} \right\} \text{wie Vakuum}$$

$$(2) \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{A}}_{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \phi = -\square \phi = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \underline{\nabla} \cdot \underline{P}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (3) \quad \underline{\nabla} \cdot \underbrace{(\epsilon_0 \underline{E}(x,t) + \underline{P}(x,t))}_{\underline{D}(x,t) \text{ dieel. Verschiebung}} = \rho(x,t)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla} (\underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{A}}_{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi}) - \Delta \underline{A}$$

$$= -\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \underline{\nabla} \phi = -\underline{E} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}$$

$$= -\square \underline{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

$$= \mu_0 \left( \underbrace{\underline{j}}_{\underline{P}} + \underbrace{\underline{j}_p + \underline{j}_M}_{\underline{\nabla} \times \underline{M}} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

$$= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}) + \mu_0 \underline{\nabla} \times \underline{M} + \mu_0 \underline{j}$$

$$(4) \quad \underline{\nabla} \times \underbrace{\left( \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M} \right)}_{\underline{H}(x,t) \text{ Magnetfeld}} = \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}$$

$\underline{H}(x,t)$  Magnetfeld

# Zusammenfassung der Maxwellgleich.

(1)	$\nabla \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0$	} WW der Felder mit Probleldungen
(2)	$\nabla \cdot \underline{B} = 0$	
(3)	$\nabla \cdot \underline{D} = \rho$	} Erzeugung der Felder durch <u>freie</u> Ladungen u. Ströme
(4)	$\nabla \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \underline{j}$	
(5)	$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$	
(6)	$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M}$	

Die Feldgl. (1) - (6) sind nicht vollständig!  
Ergänzung durch Materialgleichungen notwendig.

(Zus. hang  $\underline{P} \leftrightarrow \underline{E}$ ,  $\underline{M} \leftrightarrow \underline{B}$ )

## Einfachster Fall

(i) isotrope Materie  $\Rightarrow$   $\underline{P} \uparrow \uparrow \underline{E}$  skalar  
 $\underline{M} \uparrow \uparrow \underline{B}$  oder  $\underline{M} \uparrow \downarrow \underline{B}$   
 (paramagn.) (diamagn.)

(ii) nicht zu hohe Felder  $\Rightarrow \underline{P} \sim \underline{E}$ ,  $\underline{M} \sim \underline{B}$  linear

(iii) kein Gedächtniseffekt }  $\underline{P}(r,t) \sim \underline{E}(r,t)$  } instantan  
 keine nichtlokale WW }  $\underline{M}(r,t) \sim \underline{B}(r,t)$  } lokal

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}$$

$$\underline{M} = \chi_M \underline{H}$$

elektr. Suszeptibilität  $\chi_e$   
magn. Suszeptibilität  $\chi_M$   
 (Materialkonstanten)

suscipere

↓  
 berechnen aus mikroskop.  
 Theorien (Quantentheorie,  
 Festkörperphysik)

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$$= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E}$$

$$= \epsilon_0 \epsilon \underline{E} \quad \text{mit}$$

$\epsilon := 1 + \chi_e$  (relative Dielektrizität.)  
 konstante  
 dielectric permittivity

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M})$$

$$= \mu_0 (1 + \chi_M) \underline{H}$$

$$= \mu_0 \mu \underline{H} \quad \text{mit}$$

$\mu := 1 + \chi_M$  (relative Permeabilität)  
 permeare

$$\Rightarrow \underline{M} = \chi_M \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_M}{\mu} \underline{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_M}{1 + \chi_M} \underline{B}$$