5.6 Wellenausbreitung in Materie

Annahme: homogene, isotrope, lineare Medien mit skalaren Materialparametern ϵ, μ, σ:

$$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E} \quad (\epsilon > 1)$$

$$\underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H} \quad (\text{i.a. } \mu \approx 1)$$

$$\underline{j} = \sigma \underline{E} \quad (\text{Ohm'sches Gesetz})$$

a) Wellen in leitenden Medien ohne Dispersion

(d.h. ϵ, μ, σ unabh. von ω)

Sei $\rho = 0$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0 \qquad \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} - \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \dot{\underline{E}} = \mu_0 \mu \underline{j} = \mu_0 \mu \sigma \underline{E} \qquad \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E}) = \underline{\nabla} \underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{E})}_{0} - \Delta \underline{E} = -\underline{\nabla} \times \dot{\underline{B}} = -\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \ddot{\underline{E}} - \mu_0 \mu \sigma \dot{\underline{E}}$$

$$\boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c_M^2} \left(\ddot{\underline{E}} + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \dot{\underline{E}} \right) = 0}$$

gedämpfte Wellengl. mit $c_M := \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

(1-dim.: Telegraphengl., beschreibt Drahtwellenausbreitung)

Harmon. ebene Welle (spezielle Lösung)

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{k^2 = \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}\Big(\underbrace{1}_{\text{diel. Verschieb.}} + \underbrace{i\frac{1}{\omega\tau}}_{\text{Leitungsstrom}}\Big)}$$ Dispersions-Relation

$\tau := \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$ dielektr. Relaxationszeit

$\Longrightarrow$ Wellenvektor $k \in \mathbb{C}$ (wegen Dämpf.)

Setze $\boxed{k = \frac{\omega}{c}\tilde{n} = \frac{\omega}{c}(n + i\varkappa)}$ c Vakuumlichtgeschw.

$\tilde{n} = n + i\varkappa$ komplexen Brechungsindex

$$\Longrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \varkappa^2 + 2in\varkappa) \overset{!}{=} \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu\Big(1 + \frac{i}{\omega\tau}\Big)$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} n^2 - \varkappa^2 &= \epsilon\mu \\ n\varkappa &= \frac{\epsilon\mu}{2\omega\tau} \end{aligned}\right\} \quad n, \varkappa$$

oBdA $\underline{k} \parallel x_3$: $\underline{E}(x_3, t) = \underline{E}_0 e^{-\frac{x_3}{d}} e^{-i\omega(t - \frac{n}{c}x_3)}$

gedämpfte Welle mit Phasengeschw. $\frac{c}{n}$
und Extinktionskoeff. $d := \frac{c}{\omega\varkappa}$

Lineare Polarisation : $\underline{E}_0 \parallel x_1 \Rightarrow \underline{B}_0 \parallel x_2$

$$(\underline{\nabla} \times \underline{E})_2 = \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = -\dot{B}_2$$

$$\Rightarrow i\frac{\omega}{c}(n + i\varkappa)E_1 = i\omega B_2$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{n + i\varkappa}{c}E_1 = \frac{\sqrt{n^2+\varkappa^2}}{c}e^{i\varphi}E_1$$

Phasenverschiebung φ zwischen $\underline{E}$ u. $\underline{B}$

Isolator $(\sigma = 0)$: $\tau \to \infty \Rightarrow \kappa = 0\,,\quad \varphi = 0$
(ungedämpft) ($\underline{E}, \underline{B}$ in Phase)

reeller Brechungsindex $\frac{c}{n} < c$

NB: Nur ohne Dispersion ist ϵ reell

Metall (σ groß) : $\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma} \ll \frac{1}{\omega}$ (für alle Frequ., bis UV)

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2}\left(n^2 - \kappa^2 + 2 i n \kappa\right) \approx \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \frac{i}{\omega \tau}$$

$$\Rightarrow \quad n^2 - \kappa^2 \approx 0$$

$$n\kappa \approx n^2 \approx \kappa^2 \approx \frac{\epsilon\mu}{2\omega\tau} \Rightarrow \boxed{n = \kappa = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2\omega\tau}}}$$

$$\tan\varphi \equiv \frac{\kappa}{n} \approx 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$$

Extinktionskoeff. $d = \frac{c}{\omega\kappa} \sim$ cm für 100 Hz

hochfrequente Wellen dringen nicht ins Metall ein!

Grund: Verschiebungsstrom $\ll$ Leitungsstrom

b) Dielektr. Dispersion (Ann.: $\mu = 1$)

Betrachte zeitliche Dispersion, d.h. $\hat{\chi}(\omega)$:

$$\boxed{\underline{\hat{P}}(\omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \underline{\hat{E}}(\omega)}$$

mit $\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\; \chi(t)\, e^{i\omega t}$ (dynam. Suszept.)

Fourier-Trafo: $\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; \underline{\hat{P}}(\underline{r}, \omega)\, e^{-i\omega t}$

$$\underline{\hat{E}}(\underline{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\; \underline{E}(\underline{r}, t)\, e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt'\; \underline{E}(\underline{r}, t')\, e^{i\omega(t' - t)}$$

$$\chi(t-t')$$

$$= \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} dt' \, \chi(t-t') \, \underline{E}(\underline{r}, t')$$

(Nachwirkungseffekt : Faltungsintegral)

<u>NB</u> : <u>Kausalität</u> verlangt $\boxed{\chi(t-t') = 0 \text{ für } t' > t}$

Aus mikroskop. Modellen folgt i.a. komplexes $\hat{\chi}(\omega) \in \mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ <u>komplexe dielektr. Fkt.</u>

$$\epsilon(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$$

mit $\epsilon', \epsilon'' \in \mathbb{R}$

Aus $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \, \chi(t) e^{i\omega t}$ folgt

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= \epsilon'(-\omega) \\ \epsilon''(\omega) &= -\epsilon''(-\omega) \end{aligned}$$

<u>monochromat. ebene Welle</u> $\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$

$$\boxed{k^2 = \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega\tau}\right)}$$

<u>Isolator</u> (dispersives Dielektrikum): $\boxed{k^2 \approx \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}}$

$\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\gamma(\omega)$ komplexer, frequenzabh. Brechungsindex mit $\tilde{n}(\omega)^2 = \epsilon(\omega) = \epsilon' + i\epsilon''$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= n^2 - \gamma^2 \\ \epsilon''(\omega) &= 2n\gamma \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \gamma &= \\ n &= \end{aligned}\right\} \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \mp \epsilon'\right)^{1/2}}$$

(i) Absorption

Abs. koeff γ
reeller Brech. index

a) $\epsilon'' = 0 \implies$ Abs. koeff. $\gamma = 0$, Brech. ind. $n = \sqrt{\epsilon'}$ $\Big\}$ falls $\epsilon' > 0$ $\implies$ ungedämpfte Welle

b) $\epsilon'' > 0 \implies \gamma > 0$ (gedämpfte Welle) $\implies$ Energie-dissip.

Der Frequenzbereich mit $\epsilon'' \ll \epsilon'$ heißt Transparenzgebiet der Substanz (wenig Abs.)

(ii) Dispersion

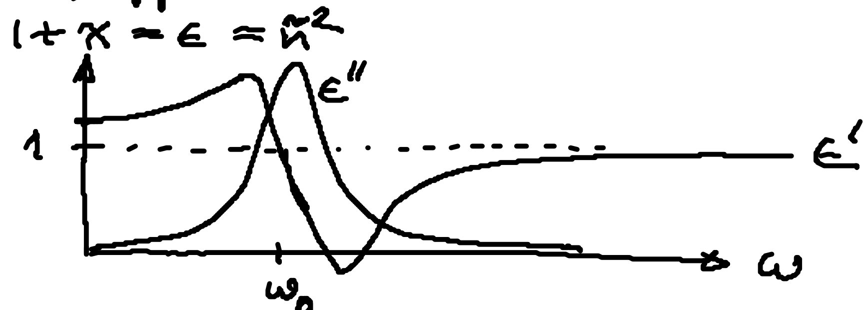
$\mathrm{Re}\,k \equiv k' = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ nichtlin. Dispersion

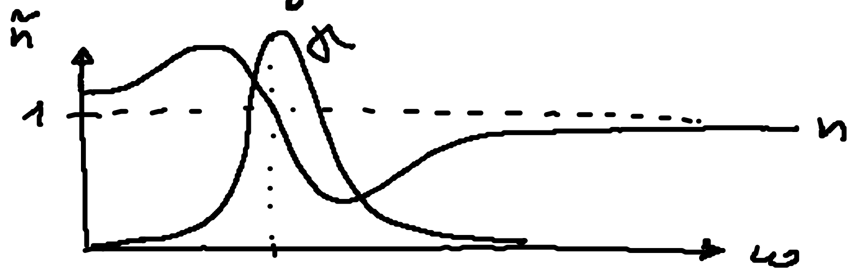
$\implies$ Gruppengeschw. $v_g := \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}}$

$$\boxed{v_g = \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}} \neq \frac{c}{n(\omega)} = v_{ph}}$$

Phasengeschw.

Typ. Frequenzabh. (Resonanzverhalten)





normale Dispersion : $\frac{dn}{d\omega} > 0$ (stets im Transparenzgebiet $\epsilon'' \approx 0$, $v_g < v_{ph}$)

anomale Dispersion : $\frac{dn}{d\omega} < 0$ (bei Absorption)

L. Brillouin : Wave Propagation