6. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

6.1. Ko- und Kontravariante Schreibweise der Relativitätstheorie

Grundpostulat der speziellen Relativitätstheorie:

- Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet
- Die Lichtgeschwindigkeit c ist in jedem Inertialsystem gleich (Einstein 1904)

→ Kugelwellen sind Lorentz-invariant $\quad r^2 - c^2t^2 = r'^2 - c^2t'^2$

Formalisierung: Der raum-zeitliche Abstand ds

$$(ds)^2 = (c\,dt)^2 - (d\underline{r})^2$$

zwischen zwei Ereignissen bleibt invariant bei Transformation zwischen Inertialsystemen $\Sigma \to \Sigma'$.

(H.A. Lorentz 1853-1928)

schreibe $(ds)^2$ als Skalarprodukt von Vierer-Vektoren im Minkowski-Raum V

Formalismus der linearen orthogonalen Transformationen, unter denen das Skalarprodukt invariant ist.

In der ko/kontravarianten Schreibweise tritt 4-Vektoren in zwei möglichen Versionen auf:

kontravariante Komponente x^i: $\quad \begin{cases} x^0 = ct \\ x^1, x^2, x^3 = \text{Komp. des Ortsvektors } \underline{r} \end{cases}$

kovariante Komponente x_i: $\quad \begin{cases} x_0 = ct \\ x_\alpha := -x^\alpha \quad \alpha = 1,2,3 \end{cases}$

kovariante Vektor $\in \tilde{V}$ dualer Vektorraum zu V

d.h. $\tilde{V} = \{\text{lin. Funktional}: V \to \mathbb{R}\}$

$$\boxed{\begin{aligned}(ds)^2 &= dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 \\ &= dx^i dx_i\end{aligned}}$$

Physikal. Anwendung:

Lorentz-Invarianten lassen sich als Skalarprodukte $a^i a_i$ schreiben!

Beispiel: d'Alembert-Operator

- $$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x_i} = -\partial_i \partial^i$$

NB: $\frac{\partial}{\partial x^i}$ transformiert sich bei Lorentz Trafo kovariant

- 4-geschwindigkeit

$$u^i := \frac{dx^i}{ds} \qquad \text{mit} \quad ds = (dx^i dx_i)^{1/2}$$

$$= c(1-\beta^2)^{1/2} dt$$

$$= \frac{c}{\gamma} dt$$

$\beta := \frac{v}{c}$

$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\Downarrow$

$$u^i u_i = \frac{dx^i dx_i}{(ds)^2} = 1$$

$$u^0 = \gamma$$

$$u^\alpha = \frac{\gamma}{c} v^\alpha$$

$$v^\alpha := \frac{dx^\alpha}{dt}$$

Phys. Interpretation: $u^\alpha = \frac{1}{c}\frac{dx^\alpha}{d\tau}$ $\quad d\tau := \frac{dt}{\gamma}$ ← Eigenzeit

- 4-Impuls

$$p^i := m_0 c u^i \quad \text{mit Ruhemasse } m_0$$

$$\Downarrow$$

$$p^i p_i = m_0^2 c^2 \underbrace{u^i u_i}_{1} = m_0^2 c^2$$

$$p^0 = m_0 \gamma c = m(v) c$$

$$p^\alpha = m_0 \gamma v^\alpha = m(v) v^\alpha$$

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2 \quad , \text{ Energie } E = m(v) c^2$$

Analoge Def. von Tensoren 2. Stufe:

$$A^{ik}, \; A^i{}_k, \; A_i{}^k, \; A_{ik} \quad \text{mit } A^{00} = A^0{}_0 = A_0{}^0 = A_{00}$$

$$A^{10} = A^1{}_0 = -A_1{}^0 = -A_{10}$$

$$A^{11} = -A_1{}^1 = -A^1{}_1 = A_{11}$$

Metrischer Tensor

$$g^{ik} := \delta^{ik} = \begin{cases} \delta^i_k & \text{für } k=0 \\ -\delta^i_k & \text{für } k=1,2,3 \end{cases} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

„Heben oder Senken der Indizes" durch g^{ik}: $g^{ik} a_k = a^i$

$\Rightarrow (ds)^2 = g^{ik} dx_i dx_k = g_{ik} dx^i dx^k$

Lorentz-Transformation (linear, homogen): $\Sigma \to \Sigma'$

$x'^i = U^i{}_k x^k$ mit $U^i{}_k \hat{=} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $V \parallel x^1$

U ist orthogonale Trafo: $U^T U = \underline{1} \Leftrightarrow \underbrace{(U^T)^l{}_i}_{U_i{}^l} U^i{}_k = \delta^l_k$

$\Rightarrow a'^i b'_i = U^i{}_k U_i{}^l a^k b_l = a^i b_i$

Skalarprodukt ist invariant.

Umkehr-Trafo $x^i = U_k{}^i x'^k$

$U_k{}^i = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & \\ 0 & & \underline{1} \end{pmatrix}$

6.2. Transformation der Ströme und Felder

<u>Ziel</u>: ko-/kontravariante Schreibweise der Elektrodynamik im Vakuum

<u>Grund</u>: Die klassische Elektrodynamik ist eine Lorentz-invariante Theorie!

Ladungserhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \partial_\alpha j^\alpha = 0$$

In 4-Schreibweise $\boxed{\partial_i j^i = 0}$ $\quad j^i = (c\rho, \underline{j})$

4-Stromdichte

Forderung: Ladungserhaltung soll in allen Inertialsystemen gelten

$\rightarrow$ j^i muss sich wie ein 4-Vektor transformieren, damit das Skalarprodukt $\partial_i j^i$ Lorentzinvariant ist.:

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x^1\right)$$

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad \text{bzw.} \quad x'^1 = \gamma(x^1 - vt)$$

$$x'^2 = x^2$$

$$x'^3 = x^3$$

Also gilt für Ladungs- u. Stromdichten

$$j'^0 = \gamma(j^0 - \beta j^1) \quad \text{bzw.} \quad \rho' = \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2} j^1\right)$$

$$j'^1 = \gamma(j^1 - \beta j^0) \quad \text{bzw.} \quad j'^1 = \gamma(j^1 - v\rho)$$

4-Potential

Die Potentiale ϕ, A sind Lösungen der

Wellengleichungen (Lorenz-Eichung)

$$\Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \Box = -\partial_k \partial^k$$

$$\Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j} \qquad \mu_0 c = \frac{1}{\varepsilon_0 c} \Longrightarrow \qquad \partial_k \partial^k \phi = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^0$$

$$\partial_k \partial^k c A^\alpha = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\alpha$$

Also $$\boxed{\partial_k \partial^k \phi^i = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i}$$

mit $\phi^0 := \phi$

$\phi^\alpha := c A^\alpha \qquad \alpha = 1,2,3$

Da j^i 4-Vektor ist, muss sich auch ϕ^i wie ein 4-Vektor transformieren, da $\partial_k \partial^k$ Lorentz-invariant ist.

$$\phi'^0 = \gamma(\phi^0 - \beta\phi^1) \quad \text{bzw.} \quad \phi' = \gamma(\phi - v A^1)$$

$$\phi'^1 = \gamma(\phi^1 - \beta\phi^0) \quad \text{bzw.} \quad A'^1 = \gamma\left(A^1 - \frac{v}{c^2}\phi\right)$$

<u>Lorenz-Eichung</u>

$$\underline{\nabla}\,\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\partial_i \phi^i = 0}$$

Lorentz-invariant!

Umeichung

$$\left.\begin{aligned} \underline{\tilde{A}} &= \underline{A} + \underline{\nabla} F \\ \tilde{\phi} &= \phi - \frac{\partial}{\partial t} F \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} c\tilde{A}^\alpha &= cA^\alpha + \partial_\alpha cF \\ &= cA^\alpha - \partial^\alpha cF \end{aligned}$$

$$\tilde{\phi}^0 = \phi^0 - \partial_0 cF = \phi^0 - \partial^0 cF$$

Also: $\boxed{\tilde{\phi}^i = \phi^i + \partial^i \varphi}$ mit bel. Lorentz invarianten skalaren Fkt $\varphi(x^k)$

Felder $\underline{E}, \underline{B}$

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$$

$$\Rightarrow E^\alpha = -\partial_\alpha \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} cA^\alpha = -\partial_\alpha \phi^0 - \partial_0 \phi^\alpha = \partial^\alpha \phi^0 - \partial^0 \phi^\alpha$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

$$cB^1 = \partial_2 cA^3 - \partial_3 cA^2 = \partial_2 \phi^3 - \partial_3 \phi^2 = \partial^3 \phi^2 - \partial^2 \phi^3$$

zyklische Vertauschung

$$cB^2 = \partial^1 \phi^3 - \partial^3 \phi^1$$

$$cB^3 = \partial^2 \phi^1 - \partial^1 \phi^2$$

Zusammenfassung durch antisymmetrischen Feldtensor

$$\boxed{F^{ik} := \partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i}$$

$$F^{ik} = -F^{ki}$$

wegen Antisymmetrie hat F^{ik} nur 6 unabhängige Komponenten:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}$$