Eichinvarianz und Ladungserhaltung

$$\tilde{\phi}^i = \phi^i + \partial^i \varphi$$

$$\tilde{W}_{tf} = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_i \tilde{\phi}^i = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_i(\phi^i + \partial^i\varphi)$$

$$= \underline{W_{tf}} - \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \underbrace{j_i \partial^i \varphi}_{\partial^i(\varphi j_i) - \varphi(\partial^i j_i)}$$

$$= W_{tf} - \underbrace{\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \partial^i(\varphi j_i)}_{\int d^3r\, c\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{c\partial t}(\varphi c \varrho) - c\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r\, \nabla\cdot(\varphi \underline{j})} + \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \varphi(\partial^i j_i)$$

$$\int d^3r\, c\int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\frac{\partial}{c\partial t}(\varphi c\varrho)}_{[\varphi\varrho]_{t_1}^{t_2}} - c\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r\, \underbrace{\nabla\cdot(\varphi\underline{j})}_{\oint d\underline{f}\,\varphi\underline{j} = 0}$$

weglassen, da Variation bei t_1, t_2 verschwindet $\leftarrow [\varphi\varrho]_{t_1}^{t_2}$

$$\Rightarrow \tilde{W}_{tf} = W_{tf} + \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \varphi \underbrace{(\partial^i j_i)}_{=0 \text{ wegen Ladungserhaltung}}$$

Fazit: Äquivalenz zwischen Eichinvarianz $\tilde{W}_{tf} = W_{tf}$ und Ladungserhaltung $\partial^i j_i = 0$

6.5 Herleitung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen aus dem Wirkungsprinzip

Die Beweg. gl. für ein Teilchen im Feld F^{ik}

$$\frac{d}{ds} p^i = \frac{q}{c} F^{ik} u_k$$

sowie die homog. Maxwellgln.

$$\epsilon_{iklm} \partial^k F^{lm} = 0 \qquad (\text{wegen } F^{lm} = \partial^l \phi^m - \partial^m \phi^l)$$

ergeben sich aus den Wirkungsintegralen

$$W_t + W_{tf} = \int_\Omega d\Omega \, \{ \underbrace{-\mu \frac{ds}{dt}}_{\text{Teilchen}} \underbrace{- \frac{1}{c^2} j_i \phi^i}_{\text{Teilchen-Feld-WW}} \}$$

durch Var. der Bahn bei geg. Potenzialen $\phi^i(x^j)$.

Vermutung: Erzeugung von Feldern durch Ladungen (inhom. Maxwell-gln.) ergeben sich durch Variation der Felder bzw. Potenziale bei geg. Bahnen.

Frage: Lagrangedichte $\mathcal{L}_f$ zur Beschreibung der Dynamik der Felder?

Ansatz: $W_f = \int_\Omega d\Omega \, \mathcal{L}(F^{ik}, \phi^i)$

Forderungen: (i) Feldgln. linear $\Rightarrow \mathcal{L}$ bilinear in F^{ik}, ϕ^i

(ii) Eindeutige Determinierung durch F^{ik} $\Longrightarrow$ keine Ableitung $\partial^l F^{ik}$

(iii) Eichinvarianz $\Rightarrow \phi^i \phi_i$ darf nicht auftreten

(iv) Lorentzinvarianz

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = -\alpha F^{ik} F_{ik}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \int d\Omega \left\{ -\mu \frac{ds}{d\tau} - \frac{1}{c^2} j_i \phi^i - \alpha F^{ik} F_{ik} \right\}}$$

$$\qquad W_t \qquad\qquad W_{tf} \qquad\qquad W_f$$

Variation für feste Bahn (d.h. festes j_i)

$$\delta W = \int d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} \underbrace{j_i \delta\phi^i}_{j^i \underline{\delta\phi_i}} - \alpha \underbrace{\delta (F^{ik} F_{ik})}_{\underbrace{\underbrace{(\delta F^{ik}) F_{ik}}_{(\delta F_{ik}) F^{ik}} + F^{ik} \delta F_{ik}}_{2 F^{ik} \delta F_{ik}}} \right\}$$

$$\delta F_{ik} = \delta (\partial_i \phi_k - \partial_k \phi_i)$$

$$= \partial_i \delta\phi_k - \partial_k \delta\phi_i$$

$$2 F^{ik} \delta F_{ik} = \underbrace{2 F^{ik} \partial_i \delta\phi_k}_{2 \underbrace{F^{ki}}_{-F^{ik}} \partial_k \delta\phi_i} - 2 F^{ik} \partial_k \delta\phi_i = -4 F^{ik} \partial_k \underline{\delta\phi_i}$$

$$\Rightarrow \delta W = \int d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} j^i \delta\phi_i + 4\alpha F^{ik} \partial_k \delta\phi_i \right\}$$

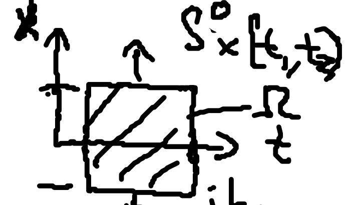
verallg. gaußscher Satz (in 4 Dim.)

$$\int_\Omega d\Omega\, \partial_k (F^{ik}\delta\phi_i) = \int_{\partial\Omega} df_k\, F^{ik}\delta\phi_i = 0$$

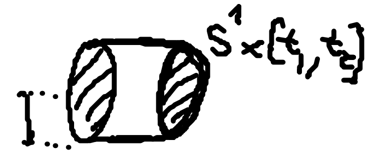
$$(\Omega = \mathbb{R}^3 \times [t_1, t_2])$$

$$F^{ik} \to 0 \quad x^\alpha \to 0$$

$$\delta\phi_i\Big|_{t_1,t_2} = 0$$



$$\int d\Omega\, F^{ik}\partial_k\delta\phi_i = \underbrace{\int d\Omega\, \partial_k(F^{ik}\delta\phi_i)}_{0} - \int d\Omega\, (\partial_k F^{ik})\delta\phi_i$$



also

$$\delta W = \int_\Omega d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} j^i - 4\alpha(\partial_k F^{ik}) \right\} \delta\phi_i = 0 \quad \text{für bel. } \delta\phi_i$$

$$\Rightarrow \quad \partial_k F^{ik} = -\frac{1}{4\alpha c^2} j^i$$

$$\partial_k F^{ki} = \frac{1}{4\alpha c^2} j^i$$

Wahl der Einheiten: $\alpha = \frac{\epsilon_0}{4c}$:

$$\boxed{\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k}$$ inhomog. Maxwell-Gln.