5.4. Zeitentwicklung eines Zustandes

- Darstellung für diskretes EW-Spektrum von $\hat{A}$:
- allg. Anfangszustand. (5.21)

$$\boxed{\begin{aligned} &\psi(\underline{r},0) \overset{\text{VONS}}{=\!=} \sum_n c_n \varphi_n(\underline{r}) \,, \quad \int |\psi(\underline{r},0)|^2 d^3r = \sum_n |c_n|^2 = 1 \\ &\qquad \text{mit } \hat{A}\varphi_n(\underline{r}) = E_n \varphi_n(\underline{r}) \text{ und } c_n = \langle \varphi_n | \psi(\underline{r},0) \rangle \\ &\longrightarrow \text{Zeitentwicklung: } \psi(\underline{r},t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\underline{r}) \end{aligned}}$$

Beweis: $\psi(\underline{r},t)$ Lsg. der SG?

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sum_n c_n \underbrace{E_n}_{} e^{-iE_nt/\hbar} \underbrace{\varphi_n(\underline{r})}_{} = \hat{H} \underbrace{\sum_n c_n e^{-iE_nt/\hbar} \varphi_n}_{\psi(\underline{r},t)} = \hat{H}\psi$$

$$= \hat{H}\varphi_n(\underline{r})$$

qed

• Zeitentwicklung:

$$\boxed{\text{Löse } \hat{H}\varphi_n = E_n\varphi_n \longrightarrow \psi(\underline{r},t)}$$

6. Meßprozeß in der QT

• Meßprozeß:

3. Beobachter $\longleftrightarrow$ 2. Meßapparatur $\longleftrightarrow$ 1. System

klass. Physik: Komponenten beeinflussen sich nicht

QT: Ww von 1. & 2. verändert System

Bsp: Doppelspalt exp.

6.1. QT-Meßprozeß

• (i) einzelne Messung $\longrightarrow$ Meßwert

(ii) Mittelung über viele Einzelmessungen an identisch präparierten Systemen (Ensemble) $\longrightarrow$ Erwartungswert $\langle\hat{A}\rangle$ (s. Kap. 4.2)

• Bsp: Beugung am Doppelspalt:

(ii) Beugung vieler e^- $\longrightarrow$ $\langle\hat{\underline{r}}\rangle$, Δr, bestimmt durch Spaltbeugungsfktn. $= |\psi(\underline{r})|^2$

(i) Beugung <u>eines</u> e^- $\longrightarrow$ lokale Schwärzung des Schirms

$\hat{=}$ Ortsmessung $\underline{r}_0$

offenbar: Änderung von $\psi(\underline{r})$

$\longrightarrow \delta(\underline{r}-\underline{r}_0)$

6.2. Meßwerte der Einzelmessung?

· zunächst:

a) <u>System im Eigenzustand von $\hat{A}$:</u>

· $\psi(r,t) = \varphi_n(\underline{r})$ mit $\hat{A}\varphi_n = a_n \varphi_n$ (diskretes EW-Spektrum)

$$\longrightarrow \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \underbrace{\hat{A} | \psi \rangle}_{a_n \varphi_n} = a_n \underbrace{\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle}_{1} = a_n$$

$$(\Delta A)^2 = \langle \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \rangle$$

$$= \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 = \langle \psi | \underbrace{\hat{A}^2 | \psi \rangle}_{a_n^2 \varphi_n} - a_n^2 = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_n \text{ wird mit Sicherheit gemessen} \\ \longrightarrow a_n \text{ Meßwert} \end{array}} \quad (6.1)$$

b) <u>allgemeiner Zustand</u>:

· Entwickle nach VONS von Eigenzuständen der Observablen $\hat{A}$:

disk. EW: $\hat{A}\varphi_n = a_n \varphi_n$

kont. EW: $\hat{A}\varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$

$$\longrightarrow \psi(\underline{r},t) = \begin{cases} \sum_n c_n(t)\varphi_n(\underline{r}), & c_n(t) \overset{(5.12)}{=} \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle \\ \int d\lambda\, c_\lambda(t)\varphi_\lambda(\underline{r}), & c_\lambda(t) \overset{(5.16)}{=} \langle \varphi_\lambda | \psi(t) \rangle \end{cases} \quad (6.2)$$

NB: VONS nötig für (6.2) $\longrightarrow$ Observable = hermitesches $\hat{A}$ mit VONS von EV

$$\rightarrow \quad \boxed{\langle \hat{A} \rangle = \begin{cases} \sum_n |c_n(t)|^2 a_n \\ \int d\lambda\, |c_\lambda(t)|^2 \lambda \end{cases}} \quad (6.3)$$

Beweis: disk. EW!

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \langle \sum_n c_n \varphi_n | \hat{A} | \sum_m c_m \varphi_m \rangle$$

$$= \sum_{n,m} c_n^*(t)\, c_m(t)\, \underbrace{\langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_m \rangle}_{a_m \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = a_m \delta_{nm}} = \sum_n |c_n(t)|^2 a_n \quad \text{qed}$$

$\rightarrow$ Deutung:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ a_{n/\lambda} \ldots \text{ Meßwerte der einzelnen Messungen} \\ 2.\ |c_{n/\lambda}(t)|^2 \ldots \text{ Wahrscheinlichkeit mit der} \\ \qquad \text{(i) } \varphi_{n/\lambda}(\underline{r}) \text{ in } \Psi(\underline{r}) \text{ auftritt} \\ \qquad \text{(ii) } a_{n/\lambda} \text{ gemessen wird} \\ 3.\ \text{Bei der Messung "kollabiert" die Wellenfkt. nach} \\ \quad \text{der Eigenfkt. } \varphi_n \text{ zum gemessenen Eigenwert } a_n \end{array}} \quad (6.4)$$

· Bsp: $\langle \hat{A} \rangle = \sum_n |c_n(t)|^2 E_n \,, \quad c_n(t) = \langle \varphi_n | \Psi(t) \rangle \quad (6.5)$

$$\langle \hat{p} \rangle = \int d^3p \;\, \underline{p} \; |\bar{\Psi}(\underline{p})|^2 \,, \quad \bar{\Psi}(\underline{p}, t) \underset{(5.8)}{\overset{(5.17)}{=}} \langle \varphi_{\underline{p}} | \Psi(t) \rangle \quad (6.6)$$

$$\langle \hat{\underline{r}} \rangle \underset{\uparrow}{=} \int d^3 r_0 \; \underline{r}_0 \, |\psi(\underline{r}_0)|^2 \,, \quad \psi(\underline{r}_0, t) \overset{(6.10)}{=} \langle \varphi_{\underline{r}_0} | \psi(t) \rangle \; (6.7)$$

$$\hat{\underline{r}} \varphi_{\underline{r}_0}(\underline{r}) = \underline{r}_0 \varphi_{\underline{r}_0}(\underline{r}) \qquad\qquad = \int d^3 r \; \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) \, \psi(\underline{r}, t)$$

NB: „$\psi(r,t)$ ist ψ projiziert auf die EV von $\hat{\underline{r}}$"!!!

· Heisenbergsche Unschärferelation: $\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

$\longrightarrow$ (i) $\hat{x}, \hat{p}$ haben keine gemeinsamen EV (s. Teil II)

(ii) Bsp: $\psi \sim \delta(x - x_0) \sim \int dp \; e^{\frac{i}{\hbar} p (x - x_0)}$

$\longrightarrow \Delta x = 0$, „$\Delta p = \infty$" $\hat{=}$ alle p mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorhanden

8. Lösungen der 1dim. (stationäre) SG

· Grundgleichung:

1D: $U(\underline{r}) = U(x) \longrightarrow \varphi(\underline{r}) = \varphi(x)$

$$\longrightarrow \text{SG:} \quad \boxed{\begin{aligned} &\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \varphi(x) = E \varphi(x) && (8.1) \\ &\varphi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \left[U(x) - E \right] \varphi(x) \,, \quad {}' = \frac{d}{dx} && (8.2) \end{aligned}}$$

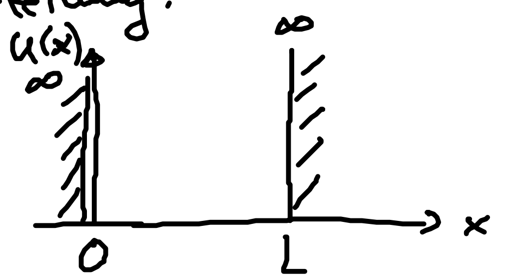
· Aussage zu $\varphi(x)$:

$$\text{(i)} \left. \begin{array}{l} \int |\varphi(x)|^2 dx = 1 \\ \text{fortlaufende Welle} \end{array} \right\} \varphi(x) \text{ endlich} \qquad (8.3)$$

$$\text{(ii) endliches } U(x) \xrightarrow[(8.2)]{} \varphi''(x) \text{ endlich} \xrightarrow{\int \ldots dx} \varphi'(x) \xrightarrow{\int \ldots dx} \varphi(x) \ldots \text{ stetig, glatt}$$

8.1 Unendlich tiefer Potentialtopf

- Problemstellung:



Beschränkung des Teilchens auf endl. Volumen

$\varphi(x) \neq 0$ für $x \in (0, L)$

- Idealisierung: „scharfe" Potentialkante $U_0 \gg E$ $\quad U_0$

- Eigenwertproblem (8.1/2)

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \varphi''(x) + k^2 \varphi(x) = 0 \, , \quad k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2} \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \ \ldots \text{ Randbed.} \end{array}} \quad (8.4)$$

$$\text{Lsg.} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{Eigenfktn.: } \varphi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}} \sin k_n x \, , \ k_n = \dfrac{\pi}{L} n \, , \ n = 1, 2, \ldots \\ \text{Energie-EW: } E_n = \dfrac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \dfrac{1}{2m} \left(\dfrac{\hbar \pi}{L} \right)^2 n^2 \end{array}} \quad (8.5)$$

Bem: (i) $\sin(\ldots)$ löst (8.4), diskrete k_n wegen Randbed. / endl. Volumen

$\longrightarrow$ <u>diskretes</u> Spektrum von E_n

(ii) $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$ $\quad$ ($n = m$: $\longrightarrow$ Normierungsfaktor $\sqrt{\frac{2}{L}}$)