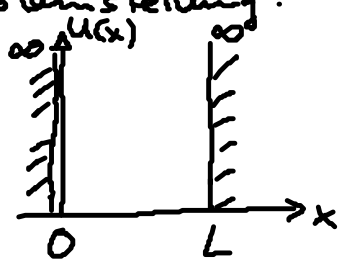
8. Lösungen der 1dim. (stationären) SG

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right]\varphi(x)=E\,\varphi(x) && (8.1)\\ &\varphi''(x)=\frac{2m}{\hbar^2}\left[U(x)-E\right]\varphi(x)\ ,\quad '=\frac{d}{dx} && (8.2)\end{aligned}}$$

$\varphi(x)$ ... stetig & glatt

8.1 Unendlich tiefer Potentialtopf

• Problemstellung:

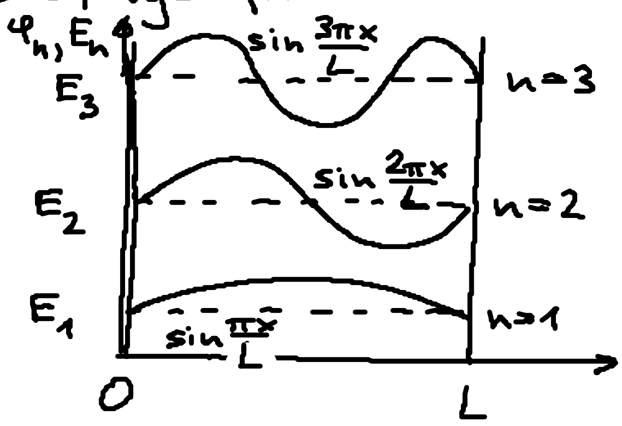


$\varphi(x)\neq 0$ für $x\in(0,L)$

$$(8.1/2)\longrightarrow \boxed{\begin{aligned}&\varphi''(x)+k^2\varphi(x)\ ,\quad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}\\ &\varphi(0)=\varphi(L)=0 \ \ldots \text{ Randbed.}\end{aligned}}\quad (8.4)$$

$$\longrightarrow \text{Lsg:}\ \boxed{\begin{aligned}&\text{EV: } \varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin k_n x\ ,\quad k_n=\frac{\pi}{L}n\ ,\quad n=1,2,\ldots\\ &\text{EW: } E_n=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^2 n^2\ ,\quad \text{diskretes Spektrum}\end{aligned}}\quad (8.5)$$

• Energie-EW/Eigenfktn:



[wie schwingende Saite!!]

• Bemerkungen:

1. Lokalisiertes = gebundenes Teilchen $\longrightarrow$ diskrete Energie-EW

= " " -Meßwerte

≠ klass. Teilchen

2. $n = 1, 2, \ldots$ Quantenzahl des Systems

3. $n = 1 \ldots$ Grundzustand, wird erreicht durch Abstrahlung von Energie / Photonen

4. $E_1 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^2 \neq 0$ ... Nullpunktsenergie, nötig damit Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt ist.

denn $\langle\hat{p}\rangle \overset{(4.33)}{=} \langle\varphi_1|\underbrace{\hat{p}}_{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}}|\varphi_1\rangle \sim \int_0^L \sin(k_1 x)\cos(k_1 x)\,dx = 0$

$\Delta p \overset{(3.15)}{=} \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle} = \sqrt{\langle 2m\hat{H}\rangle} = \sqrt{2mE_1} = \frac{\hbar\pi}{L}$

$\langle\hat{x}\rangle = \frac{L}{2}$

$\Delta x = \sqrt{\langle(\hat{x}-\frac{L}{2})^2\rangle} \underset{???}{\overset{0.8.}{=}} L\sqrt{\frac{1}{12}-\frac{1}{2\pi^2}} \approx 0{,}18L$

$\Delta x\,\Delta p \approx 0{,}18\,\pi\hbar > \frac{\hbar}{2}$!

5. Energie-EW diskret, aber kontinuierliche $\langle E\rangle$:

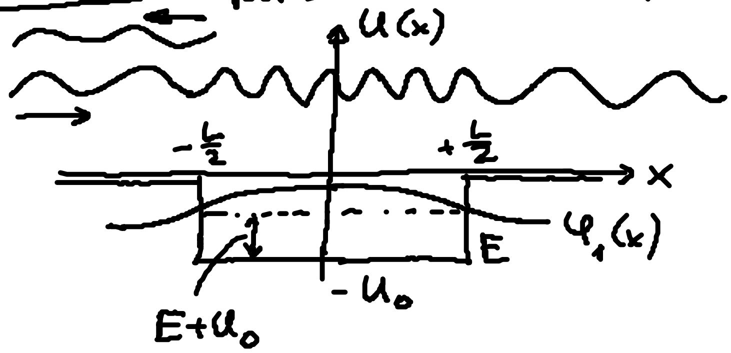
Bsp: $\psi(x,t) \overset{(5.21)}{=} c_1\varphi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\varphi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$, $|c_1|^2+|c_2|^2 = 1$

$\longrightarrow \langle E\rangle = \langle\hat{H}\rangle \overset{(6.5)}{=} |c_1|^2E_1 + |c_2|^2E_2$

$\underset{|c_1|^2=1-|c_2|^2}{=} E_1 + |c_2|^2(E_2-E_1) \geq E_1$

$$(\Delta E)^2 = \underbrace{\langle \hat{H}^2 \rangle}_{|c_1|^2 E_1^2 + |c_2|^2 E_2^2} - \langle \hat{H} \rangle^2 \overset{\text{o.B.}}{=} (E_1 - E_2)(|c_1|^2 - |c_1|^4) \geq 0$$

· <u>Potentialtopf</u> <u>endlicher Tiefe:</u> s. Übungen



(i) gebundene Zustände: $E < 0$

$|x| \geq \frac{L}{2}$: $\quad \varphi'' \overset{(8.2)}{=} \underbrace{-\frac{2mE}{\hbar^2}}_{\varkappa^2 > 0} \varphi(x)$

$\boxed{\text{klass. verbotener Bereich}}$

$\longrightarrow \varphi(x) \sim e^{-\varkappa |x|}$

$|x| \leq \frac{L}{2}$: $\quad \varphi \sim \cos kx, \sin kx$

mit k aus $E - (-U_0) = E + U_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$\varphi'' + k^2 \varphi = 0$

bei $|x| = \frac{L}{2}$:
stetiges $\varphi(x), \varphi'(x)$
$\longrightarrow$ Anschlußbed.

also: (1) weiterhin diskretes Energie-EW-Spektrum

(2) U_0 endlich & $E < 0$

$\longrightarrow$ <u>endliche</u> Anzahl von gebundenen Zuständen

(ii) ungebundene, Streu-Zustände: $E > 0$

(8.2): $\quad \varphi''(x) + k^2 \varphi(x) = 0 \qquad k^2 = \begin{cases} 2mE/\hbar^2, & |x| > \frac{L}{2} \\ 2m\frac{E+U_0}{\hbar^2}, & |x| < \frac{L}{2} \end{cases}$

$\longrightarrow$ oszillierende Lsgn:

$e^{\pm ikx}$ ... nach rechts / links laufende Welle

NB: $j = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right] = \pm \frac{\hbar k}{m}$ ... Strom nach rechts/links

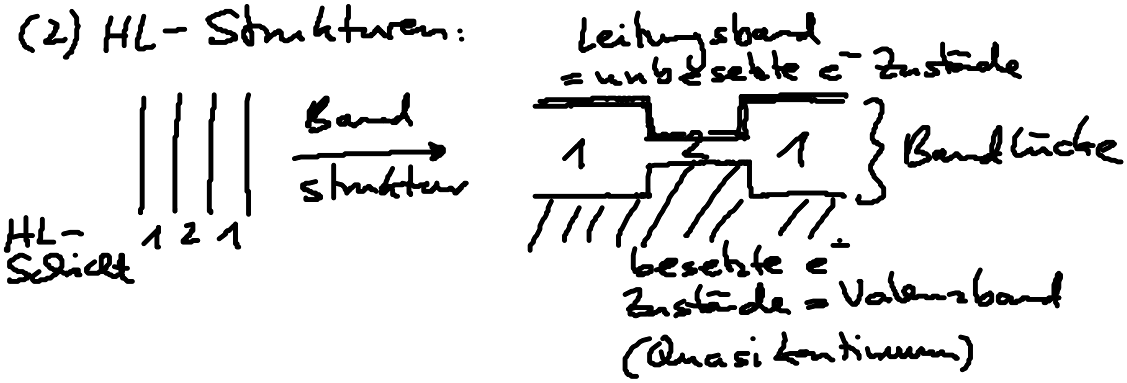
$\longrightarrow$ <u>kontinuierliches</u> Energie-EW-Spektrum

(iii) Anwendung

(1) einfachste Modell für kurzreichweitige Kräfte: Reichweite L

Bsp: Kernkräfte: n, p – System = Deuterium

(2) HL – Strukturen:

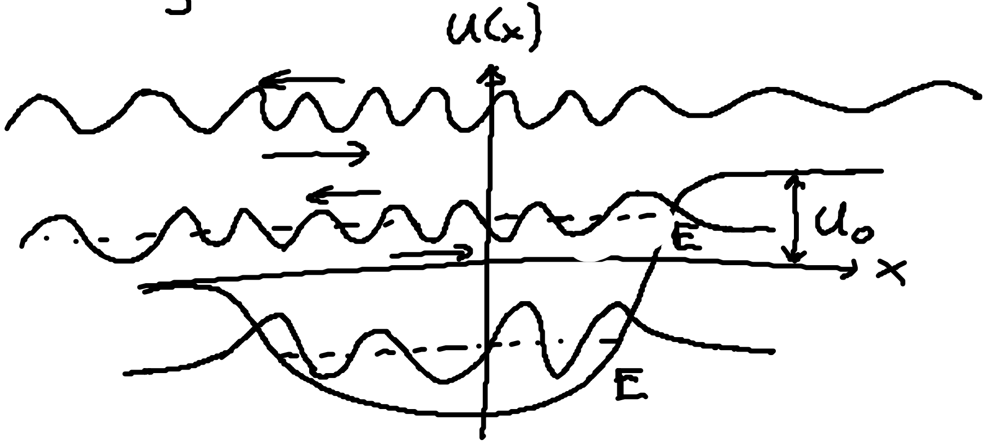


8.2 Allgemeine Betrachtung

· Aussagen zu Eigenfktn & EW

a) allgemeines Potential

• Aussagen: o.B. ⟶ Schwabl, Nolting, Messiah, Cohen-Tannoudji



Diskutiere 3 Bereiche:

(i) $E < 0$: gebundene Zustände

– diskretes Spektrum nicht entarteter EW

– im Bereich: $U(x) < E$: oszillierendes φ

$U(x) > E$ (klass. verbotener Bereich) exponentiell gedämpftes φ

– es gibt mindestens einen gebundenen Zustand [→ Übung]

– Knotensatz: $\boxed{\text{Die Bindungszustände } \varphi_n \ (n = 1, 2, \dots) \text{ besitzen } n-1 \text{ Knoten } (\hat{=} \text{ Nulldurchgänge})}$

(ii) $0 < E < U_0$: "Reflexionszustände"

- kontinuierliches Spektrum <u>nicht</u> entarteter Energie-EW
- im Bereich $U(x) < E$: oszillierendes φ aus Interferenz von ein laufender/reflekt. Welle

  $U(x) > E$: exp. gedämpftes φ

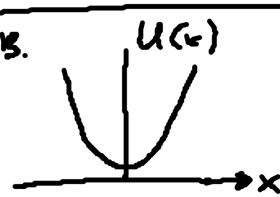
(iii) $E > U_0$: ungebundene/Streu-Zustände

- kont. Spektrum zweifach entarteter Energie-EW für nach links/rechts laufende Welle

b) <u>symmetrische Potentiale & Parität</u>

· Führe ein: Paritätsoperator $\boxed{P f(x) = f(-x)}$ (8.6) ... "Spiegelung am $x=0$"

· Annahme: $P\,U(x) = U(x)$ z.B.



wegen:
$$P \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d^2}{d(-x)^2} f(-x) = \frac{d^2}{dx^2} f(-x) = \frac{d^2}{dx^2} P f(x)$$

gilt: $\left(\hat{H} = U(x) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)$

$$\underbrace{P[\hat{H} f(x)] = \hat{H} P f(x)} = \hat{H} f(-x)$$

$$\xrightarrow[f(x)\ \text{beliebig}]{} \quad P\hat{H} - \hat{H}P = \boxed{[P, \hat{H}] = 0} \quad (8.7)$$

... Spiegelsymmetrie von $U(x)$, $\hat{H}$

$\longrightarrow$ P & $\hat{H}$ vertauschen

NB: gilt auch für andere Symmetrieoperationen

· Eigenzustände:

$$P \,\Big|\, \hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x) \longrightarrow \hat{H}\varphi(-x) = E\underbrace{\varphi(-x)}_{\text{auch Eigenfktn. zu } E!}$$

(i) gebundene Zustände:

keine Entartung: $\longrightarrow \varphi(x) \sim \varphi(-x)$

$$\xrightarrow{\varphi \text{ reell}} \boxed{\begin{array}{ll} \text{gerade Parität:} & \varphi(x) = \varphi(-x) \\ \text{ungerade " :} & \varphi(x) = -\varphi(-x) \end{array}} \quad (8.8)$$

NB: Potentialtopf: $\sin kx$, $\cos kx$

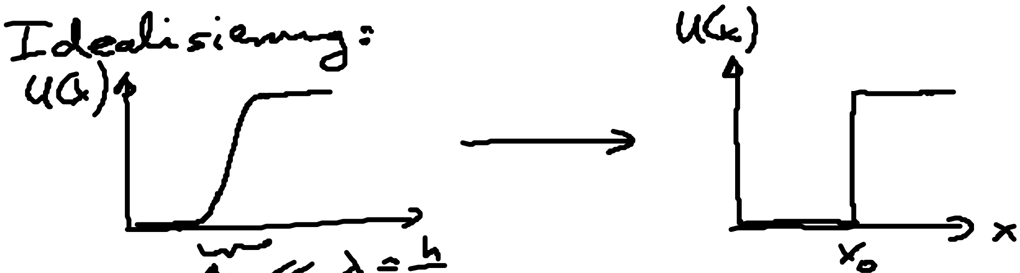
(ii) ungebundene Zustände:

zweifache Entartung $\longrightarrow$ gerade Parität: $\varphi(x) + \varphi(-x)$

ungerade " : $\varphi(x) - \varphi(-x)$

c) Anschlussbedingungen für unstetiges $U(x)$:

· Idealisierung:



$\underbrace{\Delta x}$ $\ll \lambda = \frac{h}{p}$ (8.9)

· Vorteil: Bereiche mit konstantem U, SG: $\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\varphi = 0$