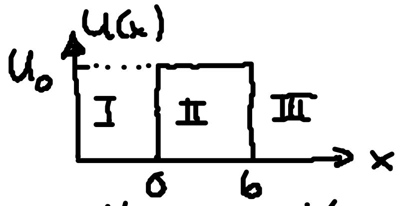
8.3 Potentialschwelle – Tunneleffekt

· Problem:



$$(8.15)\begin{cases} \varphi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \varphi_{II}(x) = A_2 e^{-\varkappa x} + B_2 e^{\varkappa x} \\ \varphi_{III}(x) = A_3 e^{ikx} \end{cases}$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\varkappa^2 = \frac{2m}{\hbar}(U_0 - E) = \begin{cases} >0, E<U_0 \\ <0, E>U_0 \end{cases}$$

$$\eta = \frac{\varkappa}{k} \quad (8.14)$$

$[\varkappa > 0,\ E < U_0$
$\varkappa = iK,\ E > U_0]$

· Anschlußbed. (8.10)

$$\longrightarrow A_1(A_3),\ B_1(A_3),\ A_2(A_3),\ B_2(A_3) \quad (8.18)$$

d) Diskussion:

· Transmissionskoeffizient (-wahrscheinlichkeit)

$$T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left|\eta + \frac{1}{\eta}\right|^2 |\sinh(\varkappa b)|^2} \leq 1 \ ! \quad (8.19)$$

Reflexionskoeffizient:

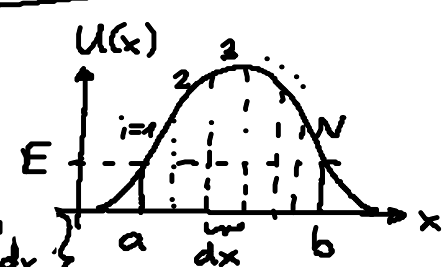
$$R = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2 \underset{(8.18)}{=} 1 - T$$ … Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit

· Tunneleffekt: $T \neq 0$ für $E < U_0$, $\varkappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}$

für $\varkappa b \gg 1$: sehr hohe und breite Schwelle

$$(8.19) \xrightarrow[\sinh x \approx \frac{1}{2}e^x]{} \boxed{T \approx \left(\frac{4\eta}{\eta^2 + 1}\right)^2 e^{-2\varkappa b}} \quad (8.20)$$

Bem: kont. Potentialschwelle



o.B.

$$T = \prod_{i=1}^{N} \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m[U(x_i) - E]}\,dx\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{2m[U(x_i)-E]}\,dx\right\}$$

$$\xrightarrow{N\to\infty} \boxed{T = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_a^b\sqrt{2m[U(x)-E]}\,dx\right\}} \quad (8.21)$$

· Streuung: $E > U_0$, $\varkappa = iK = \frac{i}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)}$

$$= \frac{i}{\hbar}\sqrt{2mU_0}\sqrt{\frac{E}{U_0}-1}$$

$$\eta = \frac{\varkappa}{k} = i\frac{K}{k} = i\lambda$$

$$\xrightarrow[\text{(8.19)}]{\sinh(ix) = i\sin x} \boxed{T = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left|\lambda-\frac{1}{\lambda}\right|^2\sin^2 Kb}} \quad (8.22)$$

$T = T\left(\frac{E}{U_0}\right)$ ... Teilchen "spürt" Schwelle

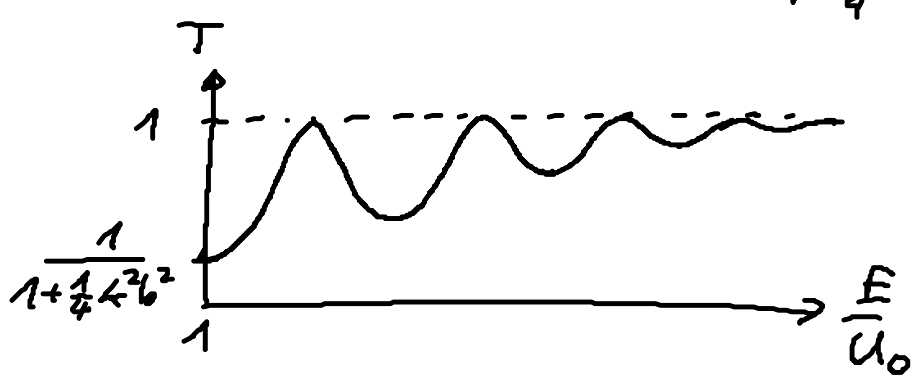
(i) "Resonanzen": $T=1$ für $Kb = n\pi \longrightarrow \left(\frac{E}{U_0}\right)_n$, $n = 1,2,\dots$

(ii) Minimum von T: für $Kb \approx (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0,1,2,\dots$

(iii) $T\left(\frac{E}{U_0}\to 1\right)$: $\sin^2(Kb) \overset{K\to 0}{\simeq} K^2b^2$

$$\longrightarrow T \approx \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left|\frac{K}{k}-\frac{k}{K}\right|^2K^2b^2}$$

$$\longrightarrow T(E=U_0) \overset{K=0}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{4}k^2b^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{mU_0}{\hbar^2}b^2} \quad (8.23)$$



8.4. Harmonischer Oszillator

- Motivation: klass. Mechanik
  … 1D harm. Oszillator (ausführlich)
  harm. gekoppelte Massepkte
  $\longrightarrow$ entkoppelte Oszillatoren
  z.B. Molekülschwingungen
  Gitterschwingung $\longrightarrow$ QT: Phononen

a) Problemstellung

- EW-Problem: $\hat{H}\varphi = E\varphi$, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x)$ (8.24)

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 \, , \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m}$$

… Hamiltonoperator des harm. Oszillators

- Skalierung: $\boxed{\text{typische Länge } \xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \quad \text{„ Energie: } \hbar\omega_0}$ dimensionslose Orts.koord.: $\xi = \frac{x}{\xi_0}$ (8.25)
  Energie: $\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega_0}$,

damit (8.24) $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right]\varphi(\xi) = \varepsilon\varphi(\xi)}$ (8.26)

… EW-Problem <u>ohne</u> störende Parameter

NB: nur gebundene Zustände
$\longrightarrow$ diskretes Spektrum nicht entarteter EW

- Lsg. der DGl. (8.26): Sommerfeldsche Polynommethode
  $\longrightarrow$ Hermitesche Polynome

b) algebraische Lsg.

· Führe ein:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{„Vernichtungsoperator"} & a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi} + \xi\right) \\ \text{„Erzeugungsoperator"} & a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{d\xi} + \xi\right) \end{array}} \quad (8.27)$$

adjungierte Operator: $\frac{d}{d\xi} \longrightarrow -\frac{d}{d\xi}$!!!

$$(8.26) \longrightarrow \quad \boxed{\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)\varphi = \varepsilon \varphi} \quad (8.28)$$

Beweis: $a^+ a\, \varphi(\xi) = \frac{1}{2}\left(-\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\left(\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\varphi(\xi)$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} - \cancel{\xi \frac{d}{d\xi}} - 1 + \cancel{\xi \frac{d}{d\xi}} + \xi^2\right)\varphi(\xi)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 - 1\right)\varphi(\xi) \quad \text{qed} \quad (8.29)$$

· Löse EW-Problem von: (8.30)

$$\boxed{\text{„Besetzungszahloperator"} \quad \hat{n} = a^+ a : \quad \hat{n}\varphi_\nu = \nu \varphi_\nu \longrightarrow \varepsilon = \nu + \frac{1}{2}}$$

· algebraische Struktur: Kommutator $[A, B] = AB - BA$!!

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & [a, a^+] = 1 \\ \text{(ii)} & [\hat{n}, a^+] = a^+ \\ \text{(iii)} & [\hat{n}, a] = -a \end{array}} \quad (8.31)$$

zu (i)

$$a a^+ = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\left(-\frac{d}{d\xi} + \xi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + 1 + \xi^2\right) \quad \& \; (8.29)$$

(ii) $[a^+ a, a^+] = a^+$ ✓

- Eigenfunktion φ_0 ... Grundzustand

Berechne: $\nu \underbrace{\langle \varphi_\nu | \varphi_\nu \rangle}_{\geq 0} = \langle \varphi_\nu | a^+ a | \varphi_\nu \rangle = \langle a\varphi_\nu | a\varphi_\nu \rangle \geq 0$ (8.32)

$\longrightarrow \nu \geq 0 \longrightarrow$ niedrigstmöglicher EW: $\boxed{\nu = 0 \text{ mit } a\varphi_0 = 0 \text{ und } \langle \varphi_0 | \varphi_0 \rangle = 1}$

- Beh.: $\boxed{\hat{n}\varphi_\nu = \nu\varphi_\nu \longrightarrow \varphi_{\nu+1} = \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} a^+ \varphi_\nu \text{ mit } \hat{n}\varphi_{\nu+1} = (\nu+1)\varphi_{\nu+1}}$

... a^+ erzeugt neue Eigenfktn. (EF) (8.33)

Beweis: $\hat{n}\, a^+ \varphi_\nu \underset{(8.31)(ii)}{=} (a^+\hat{n} + a^+)\varphi_\nu = (\nu+1) a^+ \varphi_\nu$ qed

Normierung: $\langle a^+\varphi_\nu | a^+\varphi_\nu \rangle = \langle \varphi_\nu | a a^+ | \varphi_\nu \rangle \underset{(8.31)(i)}{=} \langle \varphi_\nu | a^+ a + 1 | \varphi_\nu \rangle$

$= (\nu+1) \underbrace{\langle \varphi_\nu | \varphi_\nu \rangle}_{=1} = \nu + 1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$ qed

- also: Lsg von EW-Problem (8.30)

$$\boxed{\hat{n}\varphi_n = n\varphi_n \,, \quad \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \varphi_0 \quad , n = 0, 1, 2, \ldots} \quad (8.34)$$

n ... Besetzungszahl des harm. Oszillators

- Lösung vollständig?

(i) Beh.: $\boxed{a\varphi_\nu \text{ ist Eigenfkt. zu EW } \nu - 1}$ (8.35)

... a „vernichtet" Besetzung

Beweis: $\hat{n}\, a\varphi_\nu \underset{(8.31)(iii)}{=} (a\hat{n} - a)\varphi_\nu = (\nu - 1) a\varphi_\nu$ qed

(ii) Annahme: EW $\nu = n + \alpha$, $0 < \alpha < 1$ existiere:

nächste Stunde!