8.4. Harmonischer Oszillator

- EW - Problem:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2\right]\varphi(x) = E\,\varphi(x) \quad (8.24), \qquad \omega_0^2 = \frac{f}{m}$$

$$\downarrow \quad \xi = \frac{x}{\xi_0}, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \quad (8.25)$$

$$\varepsilon = E/\hbar\omega_0$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{d\xi^2}+\xi^2\right]\varphi(\xi) = \varepsilon\,\varphi(\xi) \quad (8.26)$$

$$\Big\downarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right) & \dots \text{ Vernichtungs op.} \\ a^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{d\xi}+\xi\right) & \dots \text{ Erzeugungs op.} \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$\boxed{\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)\varphi = \varepsilon\,\varphi} \quad (8.28)$$

$$\downarrow$$

Löse: $\hat{n}\varphi_\nu = \nu\varphi_\nu$, $\quad \hat{n} = a^+a$ ... Besetzungszahlop. (8.30)

mit
$$\boxed{\begin{aligned} &(i) \quad [a, a^+] = 1 \\ &(ii) \quad [\hat{n}, a^+] = a^+ \\ &(iii) \quad [\hat{n}, \hat{a}] = -a \end{aligned}} \quad (8.31)$$

- Grundzustand: φ_0 mit $a\varphi_0 = 0$ (8.32)

EV: $\boxed{\hat{n}\varphi_n = n\varphi_n, \quad \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n\varphi_0, \quad n = 1,2,3,\dots}$ (8.34)

- Lösung vollständig?
  - (i) $a\varphi_\nu$ ist EV zu EW $\nu-1$ (8.35)
  - (ii) Annahme: EW $\nu = n+\alpha$, $0<\alpha<1$ existiere: $\hat{n}\varphi_\nu = (n+\alpha)\varphi_\nu$ (8.36)

$$\longrightarrow \hat{n}(a^{n+1}\varphi_\nu) \underset{(8.35)}{=} [\nu-(n+1)](a^{n+1}\varphi_\nu) = (\alpha-1)(a^{n+1}\varphi_\nu)$$

Bilde: $\underbrace{(\alpha-1)}_{<0}\underbrace{\langle a^{n+1}\varphi_\nu | a^{n+1}\varphi_\nu\rangle}_{>0} = \langle a^{n+1}\varphi_\nu | \underset{=a^+a}{\hat{n}}\, a^{n+1}\varphi_\nu\rangle$

$$= \underbrace{\langle a^{n+2}\varphi_\nu | a^{n+2}\varphi_\nu\rangle}_{>0} > 0$$

$\longrightarrow$ Widerspruch $\longrightarrow$ (8.36) falsch $\rightarrow$ (8.34) vollständig

c) Darstellung im Ortsraum:

- Grundzustand/Vakuumzustand:

$$(8.32): 0 = a\varphi_0 \overset{(8.27)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\varphi_0(\xi) \overset{!}{=} 0 \longrightarrow \int\frac{d\varphi_0}{\varphi_0} = \int -\xi\, d\xi$$

$$\rightarrow \ln \varphi_0 = -\frac{\xi^2}{2} + c$$

$$\rightarrow \varphi_0 \sim e^{-\xi^2/2}$$

$$\xrightarrow{\xi = \frac{x}{\xi_0}} \boxed{\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,\xi_0}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2}, \quad \langle \varphi_0 | \varphi_0 \rangle = 1} \quad (8.36)$$

- Anregungszustände:

$$\varphi_n(x) \overset{(8.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{n!\sqrt{\pi}\,\xi_0}} (a^+)^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2} \underset{\text{führe neue Fktn.}}{\overset{!}{=}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}\,\xi_0}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{\xi_0}\right) \quad (8.37)$$

eingeführt:

$$H_n(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}} \left(\sqrt{2}\, a^+\right)^n e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\overset{(8.27)}{=} e^{\xi^2} \underbrace{e^{-\frac{\xi^2}{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n e^{\frac{\xi^2}{2}}}_{=(-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} \;\ldots\; \text{Operator}} e^{-\xi^2}$$

denn: $\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\left(e^{\xi^2/2} f(\xi)\right) = -e^{\xi^2/2} \frac{d}{d\xi} f(\xi)$

$\vdots$

$$\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n \left(e^{\xi^2/2} f(\xi)\right) = (-1)^n e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} f(\xi)$$

qed

$\rightarrow$ Hermitesche Polynome: $\boxed{H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}}$ (8.38)

(i) Bsp: $H_0(\xi) = 1$, $H_1(\xi) = 2\xi$, $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$

$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$

(ii) Orthonormierung: Es gilt: $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$ (8.39)

$$\xrightarrow{(8.37)} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \underbrace{e^{-\xi^2}}_{\text{NB: Gewichtsfkt. im Skalarprodukt}} H_n(\xi) H_m(\xi) = \sqrt{\pi}\, 2^n n! \, \delta_{nm}$$

(iii) Dgl.: $\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d}{d\xi} + 2n\right] H_n(\xi) = 0$

Beweis zu (iii): (8.29) $a^+ a \varphi_n(\xi) = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 - 1\right)\varphi_n = n\varphi_n$ & (8.37)

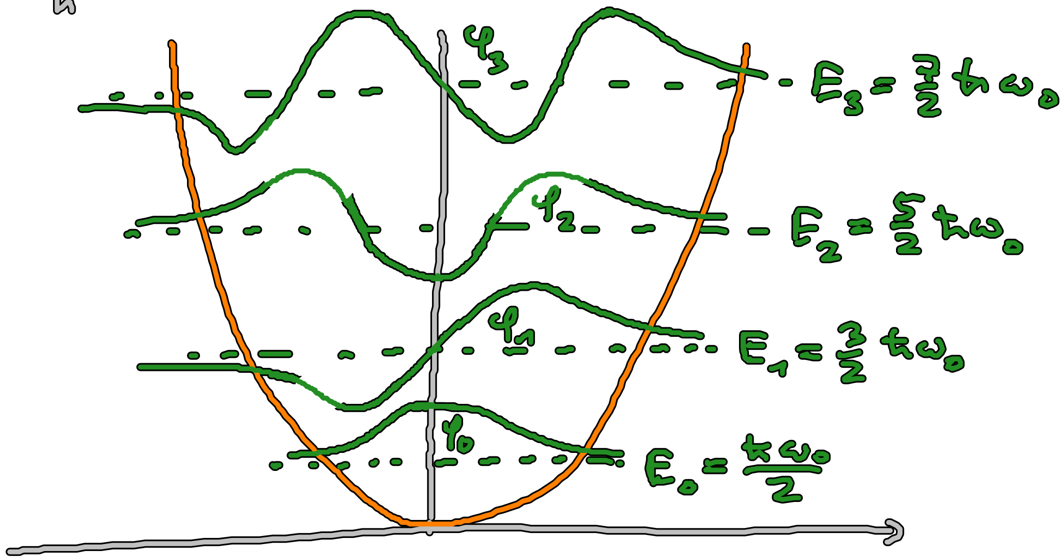
- harm. Oszillator:

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{H}\varphi_n = E_n \varphi_n \quad \text{mit } \hat{H} = \hbar\omega_0\left(a^+ a + \tfrac{1}{2}\right) \\ &\longrightarrow E_n = \hbar\omega_0\left(n + \tfrac{1}{2}\right), \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}\,\xi_0}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{\xi_0}\right) \\ &\text{mit } \xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \\ &n \ldots \text{ Zahl der Schwingungsquanten} \end{aligned}}$$

... diskretes, nichtentartetes EW-Spektrum!

(i) $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$

(ii) $\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n(x') = \delta(x-x')$



NB: (i) $\varphi_n(x)$ besitzt n Knoten

(ii) $\varphi_n = \begin{cases} \text{gerade}, & n=0,2,\dots \\ \text{ungerade}, & n=1,3,\dots \end{cases} \longleftrightarrow U(x) = U(-x)$

[vgl. Kap. 8.2b]

d) Nullpunktsenergie

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \longleftrightarrow \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ ... minimalste Unschärfe

$\hat{=}$ „Nullpkts.schwankung" des Oszillators

(8.41)

Berechnung der Unschärfen: (8.27) & (8.25)

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{\xi_0}{\sqrt{2}}(a + a^+) \\ \hat{p} &= -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}\,\xi_0}(a - a^+) \end{aligned}\right\} \quad (8.42)$$

$\langle \hat{x} \rangle \sim \langle \varphi_n | a + a^+ | \varphi_n \rangle = 0$

$$\langle \hat p\rangle \sim \langle \varphi_n | a - a^+ | \varphi_n\rangle = 0$$

$$\langle a^+\varphi_n | a^+\varphi_n\rangle = n+1$$

$$(\Delta x)^2 = \langle \hat x^2\rangle = \frac{\xi_0^2}{2}\langle\varphi_n| a^2 + aa^+ + \underbrace{a^+a}_{\to n} + (a^+)^2|\varphi_n\rangle = \xi_0^2\left(n+\frac12\right)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle \hat p^2\rangle = -\frac{\hbar^2}{2\xi_0^2}\langle\varphi_n| a^2 - aa^+ - a^+a + (a^+)^2|\varphi_n\rangle = \frac{\hbar^2}{\xi_0^2}\left(n+\frac12\right)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\Delta x\,\Delta p = \hbar\left(n+\frac12\right)} \qquad (8.43)$$

e) Kohärente oder quasiklassische Zustände:

- für Energie-EU gilt: $\langle \hat x\rangle = 0$ ... keine Oszillationen

  $\longrightarrow$ Zustände, die klass. Bewegung nahe kommen?

- Def: $\boxed{\text{Kohärente Zustände } \psi_\alpha = \text{EU von Vernichtungsoperator } a: \quad a\,\psi_\alpha = \alpha\,\psi_\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{C}}$ (8.44)

- Bestimmung der ψ_α: $\quad \psi_\alpha(x) = \sum_n c_n(\alpha)\,\varphi_n(x)$!

(i) Entw. koeffizient:

$$c_n(\alpha) = \langle\varphi_n|\psi_\alpha\rangle \overset{(8.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle (a^+)^n\varphi_0|\psi_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle\varphi_0|\underbrace{a^n\psi_\alpha\rangle}_{=\alpha^n\psi_\alpha\rangle}$$

$$\longrightarrow \quad c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle\varphi_0|\psi_\alpha\rangle \qquad (8.45)$$

(ii) Normierung:

$$1 = \langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle = \sum_n |c_n|^2 = |\langle\varphi_0|\psi_\alpha\rangle|^2 \underbrace{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}_{e^{|\alpha|^2}} \overset{!}{=} 1$$

$$\langle\varphi_0|\psi_\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \qquad (8.46)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\psi_\alpha(x) = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n(x)} \qquad (8.47)$$

• Eigenschaften: o.B. → Übungen

(i) $$\boxed{|\langle \psi_\alpha | \psi_{\alpha'} \rangle|^2 = e^{-|\alpha-\alpha'|^2}} \qquad (8.48)$$

... nicht orthogonal, bzw: $a \neq a^+$

(ii) Vollständigkeit: $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\iint d\alpha_1 \, d\alpha_2 \; \psi_\alpha^*(x)\, \psi_\alpha(x') = \delta(x-x')} \qquad (8.49)$$

• Zeitentwicklung von $\psi_\alpha(x)$:

$$\psi_\alpha(x,t) = \sum_n c_n(\alpha,t)\, \varphi_n(x) \qquad E_n = \hbar\omega_0\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\text{mit } c_n(\alpha,t) \overset{(5.31)}{=} c_n(\alpha)\, e^{-iE_n t/\hbar} = c_n(\alpha)\, e^{-i\omega_0 t\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \psi_\alpha(x,t) &= e^{-i\omega_0 t/2}\, \underline{e^{-|\alpha|^2/2}}\; \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega_0 t})^n}{\sqrt{n!}}\, \varphi_n(x)} \\ &= e^{-i\omega_0 t/2}\, \psi_{\alpha(t)}(x) \qquad \text{mit } \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}}$$

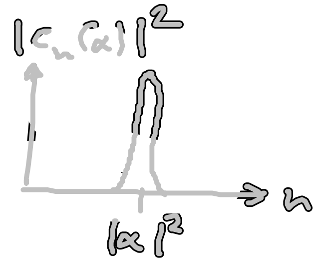
• Wahrscheinlichkeit, Energie-EW E_n zu messen:

$$\boxed{|c_n(\alpha,t)|^2 = |c_n(\alpha)|^2 = e^{-|\alpha|^2}\, \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}} \qquad (8.51)$$

... Poissonverteilung!

(i) Maximum bei $n \approx |\alpha|^2$

(ii) Verteilung für $|\alpha|^2 \gg 1$



• Energiemittelwert/-unschärfe: o.B.

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \langle \psi_\alpha | \hat{H} | \psi_\alpha \rangle = \hbar\omega_0\left(|\alpha|^2 + \tfrac{1}{2}\right) \\ \Delta E &= \left[\langle \psi_\alpha | \hat{H}^2 | \psi_\alpha \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2\right]^{1/2} = \hbar\omega_0 |\alpha| \\ &\xrightarrow[|\alpha|\gg 1]{} \frac{\Delta E}{\langle \hat{H} \rangle} \approx \frac{1}{|\alpha|} \ll 1 \quad \text{... scharfe Verteilung der } |c_n(\alpha)|^2 \end{aligned}} \qquad (8.52)$$