e) kohärente oder quasiklassische Zustände

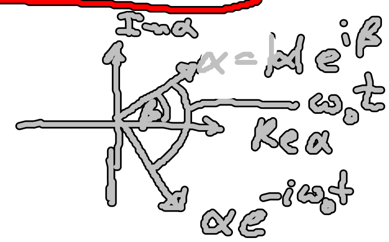
(Glauberzustände, Nobelpreis!)

• **Def:** $$\boxed{a\,\psi_\alpha = \alpha\,\psi_\alpha\,, \quad \alpha \in \mathbb{C}} \quad (8.44)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\psi_\alpha(x) = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, \underbrace{\varphi_n(x)}_{\text{EV des harm. Oszillators}}} \quad (8.47)$$

• Zeitentwicklung:

$$\boxed{\psi_\alpha(x,t) = e^{-i\omega_0 t/2}\, \psi_{\alpha(t)}(x) \quad \text{mit } \alpha(t) = \alpha\, e^{-i\omega_0 t}} \quad (8.50)$$



• Energiemittelwert/-unschärfe:

$$\langle \hat{H} \rangle = \hbar\omega_0 \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta E = \hbar\omega_0 |\alpha|$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\Delta E}{\langle \hat{H} \rangle} \approx \frac{1}{|\alpha|} \ll 1 \quad \text{für } |\alpha| \gg 1$$

• Heisenbergsche Unschärferelation: o.B.

$$\boxed{\Delta x\, \Delta p = \frac{\hbar}{2}} \quad (8.53)$$

... Unschärfe für ψ_α minimalst klein!

• Zeitentwicklung von $\langle \hat{x} \rangle$:

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi_{\alpha(t)} | \hat{x} | \psi_{\alpha(t)} \rangle \overset{(8.44)}{=} \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle \psi_\alpha(t) | a + a^\dagger | \psi_\alpha(t) \rangle$$

$$= \frac{x_0}{\sqrt{2}} \Big[\langle \psi_{\alpha(t)} | \underbrace{a | \psi_{\alpha(t)} \rangle}_{\alpha(t)} + \langle \underbrace{a}_{\alpha(t)} \psi_\alpha(t) | \psi_\alpha(t) \rangle \Big] = \frac{x_0}{\sqrt{2}} [\alpha(t) + \alpha^*(t)]$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned}\langle \hat{x}\rangle &= \sqrt{2}\,\xi_0 \quad \mathrm{Re}\,\alpha(t) \\ &= \underbrace{\sqrt{2}\,\xi_0\,|\alpha|}_{A}\cos(\omega_0 t-\beta)\end{aligned}} \quad (8.54)$$

$\alpha(t)=\alpha\, e^{-i\omega t}$
$=|\alpha| e^{-i(\omega t-\beta)}$

A … Amplitude

… Mittelwert verhält sich wie bei klass. Oszillator

$\longrightarrow$ kohärente Zustände kommen klass. Situation nahe

[vgl. 4.3 Ehrenfestsche Theorem
Oszillator:
$m\frac{d^2}{dt^2}\langle \hat{x}\rangle = -k\langle x\rangle$]

klass. Grenzfall: $|\alpha|\gg 1$

$$\langle \hat{H}\rangle \overset{(8.52)}{\approx} \hbar\omega_0 |\alpha|^2 = \frac{\hbar\omega_0}{2\xi_0^2}A^2$$

$$(8.25)\quad \xi_0^2=\frac{\hbar}{m\omega_0} \longrightarrow \langle \hat{H}\rangle = \frac{m\omega_0^2}{2}A^2$$

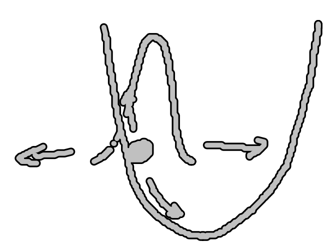
… klass. Wert

mit $\frac{\Delta E}{\langle \hat{H}\rangle} \ll 1$!!

- Wahrscheinlichkeitsdichte: o.B. $\longrightarrow$ s. Übungen

$$\boxed{|\psi_\alpha(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\xi_0}\exp\left[-\frac{(x-\langle \hat{x}\rangle)^2}{\xi_0^2}\right]} \quad 8.55$$

… Gaußsches Wellenpaket
Breite ξ_0, $\left.\begin{matrix}\text{Schwerpunkt}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ oszilliert wie $\langle \hat{x}\rangle$!!



f) Anwendung:
(i) Schwingung von Moleküle
(ii) Schwingungen des Kristallgitters
$\hat{=}$ Normalschwingungen $\quad \omega(\vec{k}, p)$ … Kreisfrequenz, Wellenvektor, Polarisation

$\hat{=}$ entkoppelte Oszillatoren: Quantisierung: $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

$a^+(\omega, \underline{k}, p)$ ... erzeugt „Phonon" der Energie $\hbar\omega$

$\hat{=}$ Teilchen der Gitterschwingung

wichtig für: Berechnung der spezif. Wärme

kohärente Zustände $\longleftrightarrow$ klass. Normalschwingung: **keine** feste Phononenzahl

(iii) em Welle: $\omega(\underline{k}, p)$

Quantisierung der em Welle ($\hat{=}$ QED)

$$\longrightarrow \quad \hat{H} = \sum_{\underline{k}, p} \hbar\omega(\underline{k}, p)\left[a^+(\underline{k}, p)\, a(\underline{k}, p) + \frac{1}{2}\right]$$

erzeugt „Photon" der Energie $\hbar\omega(\underline{k}, p)$

$\hat{=}$ Teilchen der em-Welle

Energie-EV mit $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

n ... Photonenzahl im EV

wichtig für: Hohlraumstrahlung: Plancksche Quantenhypothese

kohärente Zustände $\longleftrightarrow$ klass. em Welle: **keine** feste Photonenzahl

$\longrightarrow$ Lasermoden

II. Der formale Rahmen der QT

9. Mathematische Grundlagen

• Motivation:

(i) Darstellung von Zuständen:

$\psi(x,t)$ ... Ortsraum

$\tilde{\psi}(p,t)$ ... Impulsraum

$c_n(t)$ ... Raum der Energie-EV [s. Kap. 5.4]

⋮

$\Big\}\rightarrow$ darstellungsunabhängiger Zustand / Zustandsvektor:

$$\boxed{|\psi\rangle \quad \text{... Diracscher Ket-Vektor}} \qquad (9.1)$$

(ii) Zustände ohne Ortsraumdarstellung

Bsp: Spin $|s\rangle$ eines e^-

9.1 Hilbert-Raum der Zustandsvektoren

a) Grundlagen:

• Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ = vollständiger Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt

" " unitärer Vektorraum (9.2)

Erläuterung:

(i) Vektorraum: Rechnen mit $|\psi\rangle$

Vektorraumaxiome → Kopie

(ii) hermitesches Skalarprodukt: $|\psi\rangle$ ausmessen [s. Kap. 4.1a)]

$\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ ... Norm von $|\psi\rangle$

$\langle\varphi|\psi\rangle = 0$ ... Orthogonalität

Definition: → Kopie

(iii) Vollständigkeit:

Jede Cauchy-Folge $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}$ konvergiert gegen ein $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (9.4)

Idee: $|\psi - \psi_n\rangle = |\psi\rangle - |\psi_n\rangle$

$$\underbrace{\langle \psi-\psi_n | \psi-\psi_n \rangle}_{\text{„Abstand } |\psi\rangle \text{ von } |\psi_n\rangle\text{"}} \longrightarrow 0 \,, \text{ für } n \to \infty$$

• Satz: (o.B.) $\boxed{\text{Raum } L^2 \text{ der quadratintegrablen Funktionen } (\langle\psi|\psi\rangle < \infty) \text{ ist Hilbertraum}}$ (9.5)

(i) $\langle \psi | \psi \rangle \overset{\text{Orts-}}{\underset{\text{raum}}{=}} \int |\psi(r)|^2 d^3r$

(ii) QT: zumindest stetiges $|\psi\rangle$ [vgl. Kap. 8]

$\longrightarrow$ „unser $\mathcal{H}$" $\subset L^2$

• Satz: (o.B.) $\boxed{\text{In jedem } \mathcal{H} \text{ existiert VONS mit \underline{höchstens} \underline{abzählbar} unendlich vielen Vektoren}}$ (9.6)

Bsp: EV einer Observablen mit diskretem EW-Spektrum [s. Kap. 5.3a)]

b) „erweiterter Hilbertraum"

• eigentliche Zustandsvektoren: $|\psi\rangle \in L^2$

uneigentliche „ : $\boxed{|\lambda\rangle \,, \lambda \ldots \text{kont} \quad \underbrace{\langle\lambda|\lambda'\rangle = \delta(\lambda-\lambda')}_{\text{für VONS}}}$ (9.10)

Bsp: Impulseigenfkt. $|p\rangle$: $\left.\begin{array}{l} \langle p|p'\rangle = \delta(p-p') \\ \text{Ortsdarstellung: } \psi_p(r) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} p\cdot r} \end{array}\right\}$ (9.11)

• $\boxed{\text{erweiterter Hilbertraum} = \text{Menge der } |\psi\rangle \text{ und } |\lambda\rangle}$ (9.12)

c) dualer Raum $\mathcal{H}^*$:

• lineares Funktional: $|\psi\rangle \longrightarrow \langle\varphi|\psi\rangle \in \mathbb{C}$

$\boxed{\mathcal{H}^* = \text{Raum der linearen Funktionale } \langle\varphi|}$ (9.13)

• Bezeichnung: $\langle \varphi | \psi \rangle$
Bra(c)ket [von engl. Klammer]

$\xrightarrow{\text{Dirac}}$ Bra-Vektoren: $\langle \varphi | \in \mathcal{H}^*$
Ket- " $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (9.14)

NB: $\boxed{\langle a\varphi_1 + b\varphi_2 | = a^* \langle \varphi_1 | + b^* \langle \varphi_2 |}$ (9.15)

vgl. Eigenschaft (4.4) des Skalarprodukts

9.2 Operatoren und Darstellungstheorie

• i.f.: oft $A = \hat{A}$, ^ ... weglassen, nur bei Zweifelsfällen

a) Observable und spezielle VONS.

• Wiederholung: [s. Kap. 4.1]

(i) Operator A: $A|\psi\rangle = |A\psi\rangle = |\varphi\rangle$ mit $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ (9.16)

(ii) linearer Operator A: $A\left(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle\right) = a\,|A\psi_1\rangle + b\,|A\psi_2\rangle$ (9.17)

(iii) adjungierter Operator: $\langle \varphi | A \psi \rangle = \langle A^+ \varphi | \psi \rangle$ (9.18)

klar: $(A^+)^+ = A$ (9.19)

(iv) hermitesche Operatoren: $A^+ = A$