11. Der Drehimpuls in der QT

11.1 Definitionen, Vertauschungsrelationen & Verallgemeinerung

- $$\boxed{\begin{aligned} &\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \overset{\text{Ortsraum}}{=} \frac{\hbar}{i} \underline{r} \times \underline{\nabla}, \quad L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k \quad (11.1) \\ &L_i = L_i^+ \qquad (11.2) \\ &\underline{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \qquad (11.3) \end{aligned}}$$

a) $\underline{L}$ generiert Drehungen im Ortsraum

...

b) Verallgemeinerung

Führe ein:
$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Drehimpulsoperator } \underline{J} = \underline{J}^+ \text{ im Hilbertraum } \mathcal{R} \\ &\text{definiert durch: } [J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k \qquad (11.17) \\ &[\underline{J}^2, J_i] = 0, \quad i = 1,2,3 \qquad (11.18) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\text{Drehung in } \mathcal{R}: \quad U(\varphi)|\phi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\varphi}\cdot\underline{J}}|\phi\rangle} \quad (11.19)$$

NB: $\langle\phi|\phi\rangle = \langle U\phi|U\phi\rangle$

11.2 Algebraische Lösung des EW-Problems

- Konvention: $[\underline{J}^2, J_z] = 0 \longrightarrow$ gemeinsame EV von $\underline{J}^2, J_z$

$$\boxed{\begin{aligned} &J_z|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle, \quad m \ldots \text{magnetische (Drehimpuls) quantenzahl} \\ &\underline{J}^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle, \quad j \geq 0 \ldots \text{Drehimpuls-Quantenzahl} \end{aligned}} \quad (11.20)$$

Bem: (i) Einheit: $[J_i] = [\hbar]$!

(ii) $j(j+1)$? ... o.B.d.A

(iii) $j \geq 0$?

$$\langle jm|jm\rangle = 1 \xrightarrow[\text{2. Gl.}]{\langle jm|\,(11.20)} \hbar^2 j(j+1) = \langle jm|J_i^2|jm\rangle$$

$$= \langle J_i jm|J_i jm\rangle \geq 0 \quad \text{qed}$$

• Ziel: Erlaubte Werte von j, m aus Drehimpulsalgebra (11.17/18)

• Def: $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Aufsteige}\\ \text{Absteige}\end{array}\right\}\text{Operator: } J_\pm = J_x \pm iJ_y \longrightarrow J_+^+ = J_-}$ (11.21)

• Kommutatoren:

$$[J_z, J_\pm] = i\hbar J_y \pm \hbar J_x = \pm\hbar J_\pm \quad (11.22)$$

$$[J_+, J_-] \underset{(11.21)}{=} -2i\,\underbrace{[J_x, J_y]}_{i\hbar J_z} = 2\hbar J_z \quad (11.23)$$

$$[J^2, J_\pm] = 0 \quad (11.24)$$

• Relation: $\boxed{J_\mp J_\pm = J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z}$ (11.25)

Beweis: $(J_x \mp iJ_y)(J_x \pm iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 \pm i[J_x, J_y]$

$$= J^2 - J_z^2 \pm i(i\hbar)J_z \quad \text{qed}$$

• Es gilt:

$$J_\pm|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\,|j\,m\pm1\rangle \quad (11.26)$$

also: $J^2(J_\pm|jm\rangle) = \hbar^2 j(j+1)(J_\pm|jm\rangle)$ (11.27)

$$J_z(J_\pm|jm\rangle) = (m\pm1)\hbar\,(J_\pm|jm\rangle) \quad (11.28)$$

Beweis: (i) (11.27): $J^2(J_\pm|jm\rangle) \overset{(11.24)}{=} J_\pm(J^2|jm\rangle) = j(j+1)\hbar^2(J_\pm|jm\rangle)$ qed

(ii) (11.28): $J_z(J_\pm|jm\rangle) \overset{(11.22)}{=} (J_\pm \underbrace{J_z}_{m\hbar} \pm \hbar J_\pm)|jm\rangle = (m\pm1)\hbar\,(J_\pm|jm\rangle)$ qed

(iii) (11.26):

$$0 \leq \langle J_\pm jm|J_\pm jm\rangle = \langle jm|J_\mp J_\pm|jm\rangle$$

$$\overset{(11.25)}{=} \langle jm | J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z | jm \rangle \underset{\langle jm|jm\rangle = 1}{=}$$

$$= \hbar^2 \left[j(j+1) - m(m\pm 1) \right] \geq 0 \quad (11.29)$$

- Werte für j, m:

$$(11.29) \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} m>0: & j(j+1) \geq m(m+1) \\ m<0: & j(j+1) \geq m(m-1) = |m|(|m|+1) \end{array}\right\} \boxed{j \geq |m|} \quad (11.30)$$

damit:
$$J_+ |j\, m_{max}\rangle = 0 \xrightarrow{(11.30)} m_{max} = j$$
$$J_- |j\, m_{min}\rangle = 0 \xrightarrow{(11.30)} m_{min} = -j$$

$\longrightarrow$ festes j: $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ $\quad$ $2j+1$ EV von J^2 $\hat{=}$ Richtungsentartung

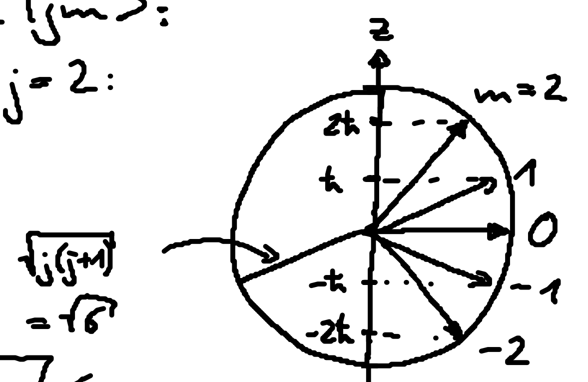
$\longrightarrow$ $\underbrace{j = 0, 1, 2, \ldots}_{\text{Bahndrehimpuls [Kap. 11.4]}}$; $\underbrace{j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots}_{\text{z.B. Eigendrehimpuls = Spin}}$

Bsp: e^- ... $j = s = \frac{1}{2}$ [Kap. 13]

... Quantisierung bzgl. Betrag (j) und Richtung (m)

- Veranschaulichung von $|jm\rangle$:

(i) Vektordiagramm: $j=2$:



... Richtungsquantelung

(ii) $\boxed{\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0}$ (11.32)

Beweis: $\langle jm|J_x|jm\rangle \underset{(11.21)}{=} \langle jm|\tfrac{1}{2}(J_+ + J_-)|jm\rangle \sim$

$$\underbrace{\langle jm|jm+1\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle jm|jm-1\rangle}_{0} \quad \text{qed}$$

(iii) Unschärfe:

$$(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 \overset{(11.32)}{=} \langle J_x^2 + J_y^2\rangle = \langle J^2 - J_z^2\rangle = \hbar^2[j(j+1) - m^2] = \text{konst.} \geq 0 \quad (11.33)$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Deutung: „} J \text{ präzediert um } z\text{-Achse im Eigenzustand } |jm\rangle\text{" besser: } J_x e_x + J_y e_y \text{ besitzt im Unschärfe „ "}}$

11.3. Der Hilbertraum $\mathcal{R}$

· Führe ein:

Raum $\mathcal{R}_j$ aufgespannt durch EV $\{\ldots|jm\rangle\ldots\}$, $m = -j, \cdots, j$

$\longrightarrow$ $\dim \mathcal{R}_j = 2j+1$ (11.34)

$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$, $J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$, J_z … führen nicht aus $\mathcal{R}_j$ heraus

$\longrightarrow$ Darstellung von J in $\mathcal{R}_j$: (o.B.)

Matrizen:

$$[J^2(j)]_{m'm} = \langle jm'|J^2|jm\rangle \overset{(11.20)}{=} \hbar^2 j(j+1)\,\delta_{mm'}$$

$$[J_z(j)]_{m'm} = \langle jm'|J_z|jm\rangle \overset{(11.20)}{=} \hbar m\,\delta_{mm'} \quad (11.35)$$

$$[J_\pm(j)]_{m'm} = \langle jm'|J_\pm|jm\rangle \overset{(11.26)}{=} \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} \times \delta_{m'm\pm 1}$$

(i) $j = 0$: $\dim \mathcal{R}_0 = 1$ $\quad |00\rangle$, $J_i(0) = 0$ … Raum der Skalare

(ii) $j = \frac{1}{2}$: $\dim \mathcal{R}_{\frac{1}{2}} = 2$ $\quad \{|\tfrac{1}{2}\,+\tfrac{1}{2}\rangle = |+\rangle = |\uparrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, |\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = |-\rangle = |\downarrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ … Raum der Spinoren

$\xrightarrow[(11.35)]{(11.34)}$ $\boxed{J_i(\tfrac{1}{2}) = \frac{\hbar}{2}\sigma_i \quad \text{mit} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$

... Paulischen Spinmatrizen

Eigenschaften: (o.B.)

$$\boxed{\begin{aligned} &(i)\ \ \sigma_i^2 = \mathbb{1}, \quad i = x, y, z \\ &(ii)\ \ [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ &(iii)\ \ \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \end{aligned}}$$

(iii) $j = 1$: $\dim \mathcal{R}_1 = 3$, Reihenfolge $m = 1, 0, -1$

$$\xrightarrow[(11.35)]{(11.34)} \quad J_x(1) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ J_y(1) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ J_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11.38)$$

$$\underline{J}^2(1) = 2\hbar\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Drehungen in $\mathcal{R}_1$: unitäre Matrizen $U(\underline{\varphi}, 1) \overset{(11.19)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\varphi}\cdot\underline{J}(1)}$ (11.39)

$\longrightarrow$ „$\underline{J}(1)$ generiert Darstellung der Drehgruppe SO(3) in $\mathcal{R}_1$"

- Hilbertraum: $\boxed{\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{R}_1 \oplus \dots = \sum_j \mathcal{R}_j}$ (11.40)

11.4. Ortsdarstellung

- Ges: $Y_{lm}(\underline{r}) = \langle \underline{r} | lm \rangle$ mit $j = l$! s.u.

- Operatoren in Kugelkoordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (11.41)$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\nabla} &= \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \underline{r} &= r\, \underline{e}_r \end{aligned}\right\} \quad (11.42)$$

$$\xrightarrow[(11.1)/(11.21)]{\text{o.B.}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_x &= \frac{\hbar}{i} \left(-\sin\varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\cos\varphi}{\tan\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ L_y &= \frac{\hbar}{i} \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin\varphi}{\tan\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ L_z &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ L_\pm &= \hbar e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \frac{1}{\tan\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \underline{L}^2 &= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \end{aligned}} \quad (11.42)$$

$$Y_{lm}(\underline{r}) = Y_{lm}(\vartheta, \varphi)!$$