11. Der Drehimpuls in der QT

11.1 Definitionen, Vertauschungsrelationen & Verallgemeinerung

- $$\boxed{\begin{aligned} &\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \overset{\text{Ortsraum}}{=} \frac{\hbar}{i}\underline{r}\times\underline{\nabla}, \quad L_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, p_k && (11.1)\\ &L_i = L_i^+ && (11.2)\\ &\underline{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 && (11.3)\end{aligned}}$$

a) $\underline{L}$ generiert Drehungen im Ortsraum

...

b) Verallgemeinerung

Führe ein:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Drehimpulsoperator } \underline{J} = \underline{J}^+ \text{ im Hilbertraum } \mathcal{R}\\ &\text{definiert durch: } [J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k && (11.17)\\ &[\underline{J}^2, J_i] = 0, \quad i = 1,2,3 && (11.18)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\text{Drehung in } \mathcal{R}: \quad U(\underline{\varphi})|\phi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\varphi}\cdot\underline{J}}|\phi\rangle} \quad (11.19)$$

NB: $\langle\phi|\phi\rangle = \langle U\phi|U\phi\rangle$

11.2 Algebraische Lösung des EW-Problems

- Konvention: $[\underline{J}^2, J_z] = 0 \longrightarrow$ gemeinsame EV von $\underline{J}^2, J_z$

$$\boxed{\begin{aligned} &J_z|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle, \quad m \text{ ... magnetische (Drehimpuls) Quantenzahl}\\ &\underline{J}^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle, \quad j \geq 0 \text{ ... Drehimpuls-Quantenzahl}\end{aligned}} \quad (11.20)$$

Bem: (i) Einheit: $[J_i] = [\hbar]$!

(ii) $j(j+1)$? ... o.B.d.A

(iii) $j \geq 0$?

$$\langle jm|jm\rangle = 1 \xrightarrow[\langle jm|\,(11.20)\ 2.6\mathrm{l.}]{} \hbar^2 j(j+1) = \langle jm|J_i^2|jm\rangle$$
$$= \langle J_i jm|J_i jm\rangle \geq 0 \quad \text{qed}$$

- Ziel: Erlaubte Werte von j, m aus Drehimpulsalgebra (11.17/18)
- Def: $\boxed{\left.\begin{matrix}\text{Aufsteige}\\ \text{Absteige}\end{matrix}\right\}\text{Operator: } J_\pm = J_x \pm i J_y \longrightarrow J_+^\dagger = J_-}$ (11.21)

- Kommutatoren:

$$[J_z, J_\pm] = i\hbar J_y \pm \hbar J_x = \pm\hbar J_\pm \quad (11.22)$$
$$[J_+, J_-] \underset{(11.21)}{=} -2i\underbrace{[J_x, J_y]}_{i\hbar J_z} = 2\hbar J_z \quad (11.23)$$
$$[J^2, J_\pm] = 0 \quad (11.24)$$

- Relation: $\boxed{J_\mp J_\pm = J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z}$ (11.25)

Beweis: $(J_x \mp iJ_y)(J_x \pm iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 \pm i[J_x, J_y]$
$$= J^2 - J_z^2 \pm i(i\hbar)J_z \quad \text{qed}$$

- Es gilt:

$$J_\pm|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j\, m\pm 1\rangle \quad (11.26)$$
also: $$J^2(J_\pm|jm\rangle) = \hbar^2 j(j+1)(J_\pm|jm\rangle) \quad (11.27)$$
$$J_z(J_\pm|jm\rangle) = (m\pm 1)\hbar(J_\pm|jm\rangle) \quad (11.28)$$

Beweis: (i) (11.27): $J^2(J_\pm|jm\rangle) \overset{(11.24)}{=} J_\pm(J^2|jm\rangle) = j(j+1)\hbar^2(J_\pm|jm\rangle)$ qed

(ii) (11.28): $J_z(J_\pm|jm\rangle) \overset{(11.22)}{=} (J_\pm \underbrace{J_z}_{m\hbar} \pm \hbar J_\pm)|jm\rangle = (m\pm 1)\hbar(J_\pm|jm\rangle)$ qed

(iii) (11.26):

$$0 \leq \langle J_\pm jm|J_\pm jm\rangle = \langle jm|J_\mp J_\pm|jm\rangle$$

$$\overset{(11.25)}{=} \langle jm|\, J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z \,|jm\rangle \underset{\langle jm|jm\rangle = 1}{=}$$

$$= \hbar^2 \left[j(j+1) - m(m\pm 1) \right] \geq 0 \qquad (11.29)$$

• Werte für j, m:

$$(11.29) \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} m>0: & j(j+1) \geq m(m+1) \\ m<0: & j(j+1) \geq m(m-1) = |m|(|m|+1) \end{array}\right\} \boxed{j \geq |m|} \qquad (11.30)$$

damit:

$$J_+|j\, m_{max}\rangle = 0 \xrightarrow{(11.30)} m_{max} = j$$

$$J_-|j\, m_{min}\rangle = 0 \xrightarrow{(11.30)} m_{min} = -j$$

→ festes j: $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ $\qquad$ $2j+1$ EV von J^2
$\hat{=}$ Richtungsentartung

→ $\underbrace{j = 0, 1, 2, \dots}_{\text{Bahndrehimpuls}}$; $\underbrace{j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots}_{\text{z.B. Eigendrehimpuls}}$

Bahndrehimpuls [Kap. 11.4]

z.B. Eigendrehimpuls = Spin

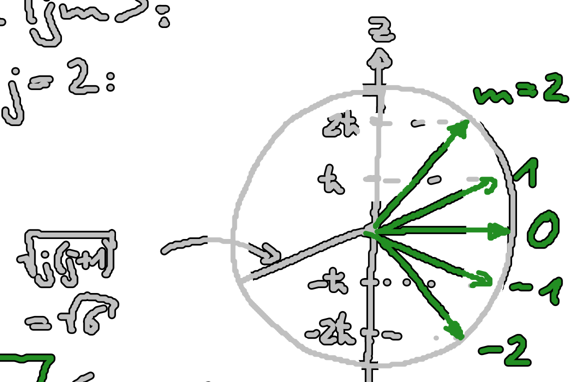
Bsp: e^- ... $j = s = \frac{1}{2}$

[Kap. 13]

... Quantisierung bzgl. Betrag (j) und Richtung (m)

• Veranschaulichung von $|jm\rangle$:

(i) Vektordiagramm: $j = 2$:



... Richtungsquantelung

(ii) $\boxed{\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0}$ (11.32)

Beweis: $\langle jm|J_x|jm\rangle \underset{(11.21)}{=} \langle jm|\frac{1}{2}(J_+ + J_-)|jm\rangle \sim$
$\underbrace{\langle jm|jm+1\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle jm|jm-1\rangle}_{0}$ qed

(iii) Unschärfe:
$$(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 \overset{(11.12)}{=} \langle J_x^2 + J_y^2\rangle = \langle J^2 - J_z^2\rangle = \hbar^2[j(j+1)-m^2] = \text{konst.} \geq 0 \quad (11.33)$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Deutung: „}J\text{ präzediert um z-Achse im Eigenzustand } |jm\rangle\text{" besser: } J_x e_x + J_y e_y \text{ besitzt im Unschärfe „ "}}$

11.3. Der Hilbertraum R

- Führe ein:

$\boxed{\text{Raum } R_j \text{ aufgespannt durch EV } \{\ldots|jm\rangle\ldots\},\ m=-j,\ldots,j \quad \longrightarrow \dim R_j = 2j+1 \quad J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-),\ J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-),\ J_z \ldots \text{ führe nicht aus } R_j \text{ heraus}}$ (11.34)

$\longrightarrow$ Darstellung von J in R_j: (o.B.)

Matrizen:
$$\boxed{\begin{aligned}[J^2(j)]_{m'm} &= \langle jm'|J^2|jm\rangle \overset{(11.20)}{=} \hbar^2 j(j+1)\delta_{mm'} \\ [J_z(j)]_{m'm} &= \langle jm'|J_z|jm\rangle \overset{(11.20)}{=} \hbar m\, \delta_{mm'} \\ [J_\pm(j)]_{m'm} &= \langle jm'|J_\pm|jm\rangle \overset{(11.26)}{=} \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)} \times \delta_{m',m\pm1}\end{aligned}}$$ (11.35)

(i) $j=0$: $\dim R_0 = 1$ $\quad |00\rangle$, $J_i(0)=0$ ... Raum der Skalare

(ii) $j=\frac{1}{2}$: $\dim R_{\frac{1}{2}} = 2$ $\quad \{|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle = |+\rangle = |\uparrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$
$|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle = |\downarrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ ... Raum der Spinoren

$\xrightarrow[(11.35)]{(11.34)}$ $\boxed{J_i(\tfrac{1}{2}) = \frac{\hbar}{2}\sigma_i \quad \text{mit} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$

... Paulischen Spinmatrizen

Eigenschaften: (Ü.S.)

(i) $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$, $i = x, y, z$

(ii) $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

(iii) $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$

(iii) $j = 1$: $\dim \mathcal{R}_1 = 3$, Reihenfolge $m = 1, 0, -1$

$\xrightarrow[(11.35)]{(11.34)}$ $J_x(1) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_y(1) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$, $J_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (11.38)

$J^2(1) = 2\hbar\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Drehungen in $\mathcal{R}_1$: unitäre Matrizen $U(\varphi, 1) \overset{(11.13)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\cdot J(1)}$ (11.39)

$\longrightarrow$ „$J(1)$ generiert Darstellung der Drehgruppe $SO(3)$ in $\mathcal{R}_1$"

- Hilbertraum: $\boxed{\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{R}_1 \oplus \ldots = \sum_j \mathcal{R}_j}$ (11.40)

11.4. Ortsdarstellung

- Ges: $Y_{lm}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | lm \rangle$ mit $j = l$! s.u.

- Operatoren in Kugelkoordinaten: $\left.\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}\right\}$ (11.41)

$$\left.\begin{aligned} \underline{\nabla} &= \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \underline{r} &= r\,\underline{e}_r \end{aligned}\right\} \text{(11.42)}$$

$\xrightarrow[(11.1)/(11.21)]{\text{o.B.}}$

$$\boxed{\begin{aligned} L_x &= \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\cos\varphi}{\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_y &= \frac{\hbar}{i}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\sin\varphi}{\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ L_\pm &= \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\frac{1}{\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ \underline{L}^2 &= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \end{aligned}} \quad \text{(11.42)}$$

$Y_{lm}(\underline{r}) = Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$!