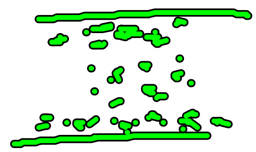
II.8. Ginzburg-Landau-Theorie

⇒ Verallgemeinerung der gewöhnlichen Landau-Theorie für Systeme mit ortsabhängigem Ordnungsparameter

$$m(\underline{r}),\ \rho(\underline{r})$$



Betrachte Funktional der freien Energie

(Annahme: $c(T) > 0$)

$$F = \int d\underline{r}\, f(\underline{r})$$

$\leftarrow$ Freie-Energie-Dichte

mit

$$f(\underline{r}) = a(\underline{r}) + \frac{b(T)}{2}\big(m(\underline{r})\big)^2 + \frac{c(T)}{4}\big(m(\underline{r})\big)^4 - m(\underline{r})\underbrace{h(\underline{r})}_{\text{äußeres Feld}} + \frac{f}{2}\big(\nabla m(\underline{r})\big)^2$$

$\vdots$

Bemerkungen dazu

i) Gradienten-Term ist typisch für Ginzburg-Landau Theorien!

$(\nabla m)^2$ damit $\underbrace{\text{Rotationsinvarianz}}_{\text{von } F}$ gewährleistet

typischerweise setzt man Vorfaktor $f > 0$ ⇒ Inhomogenität des Ordnungsparameters führen zu einer <u>Erhöhung</u> der freien Energie!

ii) Die Entwicklung setzt voraus, daß sich $m(\underline{r})$ nur langsam mit $\underline{r}$ ändert!
ansonsten müssten auch höhere Ableitungen in $F(\underline{r})$ berücksichtigt werden!

iii) Korrelation zwischen verschiedenen Bereichen im Raum werden vernachlässigt!

sieht man daran, daß keine Kopplungsterme in F auftauchen!

z.B. $\int d\underline{r} \int d\underline{r}' \, m(\underline{r})\, m(\underline{r}')\, a(\underline{r},\underline{r}')$

Bestimmung des Ordnungsparameters im Gleichgewicht

$$\frac{\delta F}{\delta m(\underline{r}')} \overset{!}{=} 0 \quad \text{(Variationsableitung)}$$

man findet (Übung!)

$$\left(F = \int d\underline{r}\, \left(a(\underline{r}) + \frac{b}{2}\big(m(\underline{r})\big)^2 + \frac{c}{4}\big(m(\underline{r})\big)^4 - m(\underline{r})\,h(\underline{r}) + \frac{f}{2}\big(\nabla m(\underline{r})\big)^2 \right)\right)$$

$$\frac{\delta F}{\delta m(\underline{r}')} = 0$$

$$\Rightarrow\quad 0 = b\,m(\underline{r}) + c\big(m(\underline{r})\big)^3 - h(\underline{r}) - f\,\underbrace{\Delta}_{\text{Laplace}}\, m(\underline{r})$$

Differentialgleichung im Raum!

III.9. Gültigkeitsbereich von Landau-Theorien, Ginzburg-Landau Kriterium

Ausgangspunkt beim Ginzburg-Landau-Funktional

$m(\underline{r})$ ändert sich langsam mit $\underline{r}$!

$\Leftrightarrow$ räumliche Fluktuationen (Korrelationen) sind klein genauer: Fluktuationen sollten klein sein gegenüber dem räuml. Mittelwert des Ordnungsparameters ⊛

also $\langle (M - \langle M\rangle)^2\rangle \le \langle M\rangle^2$

mit $M = \int d\underline{r}\, m(\underline{r})$

schreibe ⊛ um

$$\langle M^2\rangle = \langle \int d\underline{r}\, m(\underline{r}) \int d\underline{r}'\, m(\underline{r}')\rangle$$

$$= V \int d\underline{r}\, \langle m(\underline{r})\, m(\underline{0})\rangle$$

Translationsinvarianz (im statistisch Mittel!)

aus ⊛ folgt:

$$\underbrace{\int d\underline{r}^d}_{\text{Raumintegral in d Raumdimension}} \Big(\overbrace{\langle m(\underline{r})\, m(\underline{0})\rangle - \langle m(\underline{r})\rangle\langle m(\underline{0})\rangle}^{\text{Spin-Spin oder Dichte-Dichte Korrelationsfunktion}} \Big) \le \int d\underline{r}^d \langle m(\underline{r})\rangle\langle m(\underline{0})\rangle$$

Wir wissen:

Korrelationsfunktion verhält sich

wie

$$\frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2}}$$ ← Korrelationslänge

(Ornstein-Zernike-Verhalten!)

⟶ Raumintegrale können auf Abstände $r \leq \xi$ beschränkt werden!

nehme auch noch an $\langle m(\underline{r})\rangle = \langle m(\underline{0})\rangle = M_0$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Winkel-} \\ \text{faktor}}}{B} \int_0^{\xi} dr\, r^{d-1} \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2}} \leq B\, \xi^d M_0^2$$

$$\Leftrightarrow B \int_0^{\xi} dr\, r\, e^{-r/\xi} \leq B\, \xi^d \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mittlere} \\ \text{Magnetisierung}}}{M_0^2}$$

Wir wissen außerdem:

$$M_0 = A_M \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)^{\beta}$$

$$\Rightarrow B \int_0^{\xi} dr\, r\, e^{-r/\xi} \leq B A_M\, \xi^d \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)^{2\beta} \quad (**)$$

Integral umformen:

$$x = \frac{r}{\xi} \Rightarrow r = x\xi \Rightarrow \frac{dr}{dx} = \xi \Leftrightarrow dr = dx\,\xi$$

$$\Rightarrow r\,dr = \xi^2 x\,dx$$

einsetzen in (**)

$$\Rightarrow B\,\xi^2 \int_0^1 dx\, x e^{-x}$$

$$\le B\,\xi^{d} \left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{2\beta} A_M$$

$$\Rightarrow A_M^{-1} \underbrace{\int_0^1 dx\, x\, e^{-x}}_{C}\, \xi^{2-d} \left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-2\beta} \le 1$$

Faktor von de Größenordnung eins

$$\Rightarrow \boxed{\xi^{2-d} \left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-2\beta} \le 1}$$

benutze jetzt noch:

$$\xi \sim \left(\frac{|T-T_c|}{T_c}\right)^{-\nu}$$

(mit Vorfaktor von der Größenordnung eins)

einsetzen

$$\boxed{\left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-2\nu+d\nu-2\beta} \leq 1}$$

"Ginzburg-Kriterium"

Damit dies erfüllt ist (für $T \to T_c$), muss gelten

$$d\nu - 2\beta - 2\nu \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_c - T}{T_c} < 1$$

Betrachte jetzt speziell MF-Theorie:

$$\beta = \frac{1}{2}$$

$$\nu = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}d - 2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{d \geq d_c = 4}$$

"Obere kritische Dimension" !

Aussage:
Landau-artige Theorie wird "richtig" für $\underline{\underline{d \geq 4}}$

Andererseits:

wir hatten:

$$\left(A_M^{-1}\int_0^1 dx\, x e^{-x}\right)\xi^{2-d}\left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-2\beta} \leq 1$$

benutze wieder $\xi = A_\xi \left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-\nu}$

$$\left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-2\nu+d\nu-2\beta} \leq \left(\int_0^1 dx\, x e^{-x}\right)^{-1} A_M A_\xi^{-1} \Rightarrow$$

einsetzen der MF-Exponenten

$$\frac{|T-T_c|}{T_c}^{\frac{1}{2}(d-4)} \leq D$$

bestimmt durch Amplitude, Verhalten
$\Rightarrow$ bekannt!

$$\Leftrightarrow \frac{|T-T_c|}{T_c}^{4-d} \geq D^{-2}$$

z.B. $d=3$ $\quad \frac{|T-T_c|}{T_c} \geq D^{-2}$

Interpretation:
Bei Annäherung an T_c wird die (Ginzburg-)Landau dann schlecht wenn $\frac{|T-T_c|}{T_c} = \tau \leq \tau_{GL} = D^{-2}$

Ginzburg-Landau-Temperatur !

z.B. Ferromagnete: $\tau_{GL} \sim 10^{-2}$

"ionische Flüssigkeit" ? $\tau_{GC} \sim 10^{-5}$

Elektrolyte-