Noch kein Mosesaccount

KAS Konto $\xrightarrow{\text{Nein}}$ Mathematik Servicezentrum MA 704

Temporärer Account

Moses Sprechstunde
17.4 10 – 12 in Raum EW ~~7~~ 710/711

Ziele

- Vermittlung von „Rüstzeug" für die Theoretische Physik — Einführung in die Sprache

Unterschied zu anderen Mathe-VL

Keine strengen Beweise, sondern Beschränkung auf „Tools"

— wie man sie später braucht

Inhalt

I. Wiederholung Analysis (einer Variablen)

z.B. Taylor-Entwicklung

II. Gewöhnliche Differentialgleichungen

z.B. Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\underline{r}}(t) = \underline{F}(\underline{r}(t))$$

III. Partielle Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

freies Teilchen

IV. Koordinatentransformation

V. Vektoranalysis

Analysis von physikalischen Feldern

z.B. Magnetfeld $\underline{B}(\underline{r}, t)$

z.B. Induktionsgesetz: $\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}$

elektr. Feld

I. Wiederholung Analysis einer Veränderlichen

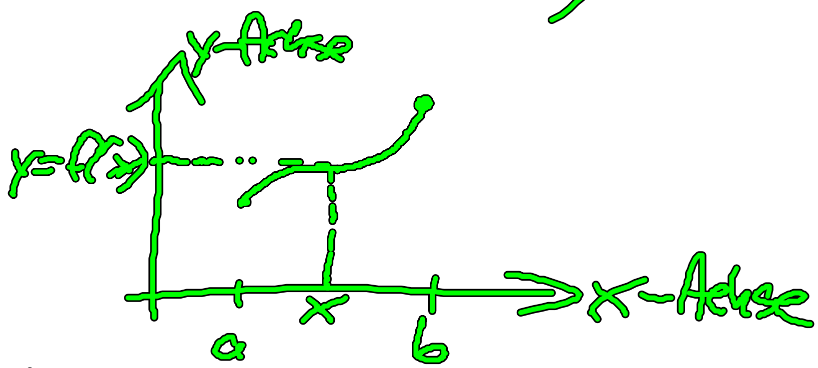
I.1. Funktion einer Variablen

Sei D eine Menge und f eine Zuordnung, die jedem Element $x \in D$ eine reelle Zahl $f \in \mathbb{R}$ zuordnet

$\Rightarrow f(x)$ ist reellwertige Funktion mit Definitionsbereich D

(z.B. $D = \mathbb{R}$, $D = [a,b]$)

Darstellung:

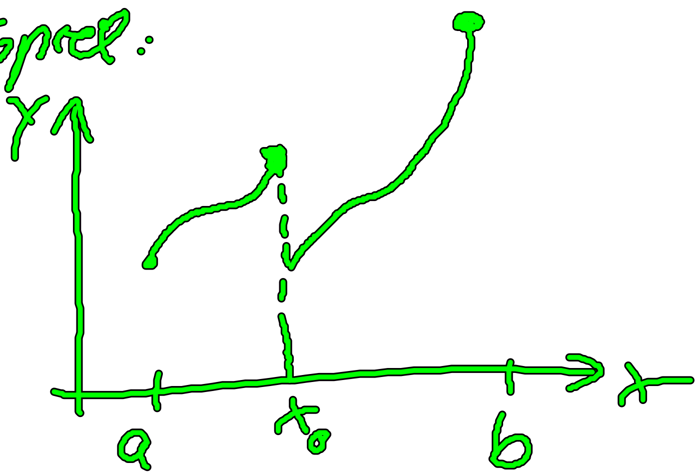


Begriff der <u>Stetigkeit</u>

Die Funktion f heißt stetig an der Stelle $x \in D$, falls $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$

↗ Grenzwert

Gegenbeispiel:



wichtig z.B. bei Wellenfunktionen in der Quantenmechanik

Umkehrfunktion

Sei f eine injektive Funktion, d.h. $f(x) \neq f(x')$ für alle $x \neq x'$ in D

Die Umkehrfunktion heißt $f^{-1}(x)$

so gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

bzw $$f(f^{-1}(x)) = x$$

Beispiele

1) $f(x) = e^x \quad (D = \mathbb{R},\ \overset{\text{Bildmenge}}{B} = f(D) = \mathbb{R}^+)$

$$f^{-1}(x) = \ln x \quad (D = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R})$$

denn $e^{\ln x} = \ln e^x = x \underbrace{\ln e}_{1} = x$

2) $f(x) = a^x$

$$= e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

$$f^{-1}(x) = {}_a\log x$$

Logarithmus zur Basis a

$$= \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$f^{-1}(f(x)) = {}_a\log(a^x) = \frac{\ln a^x}{\ln a}$$

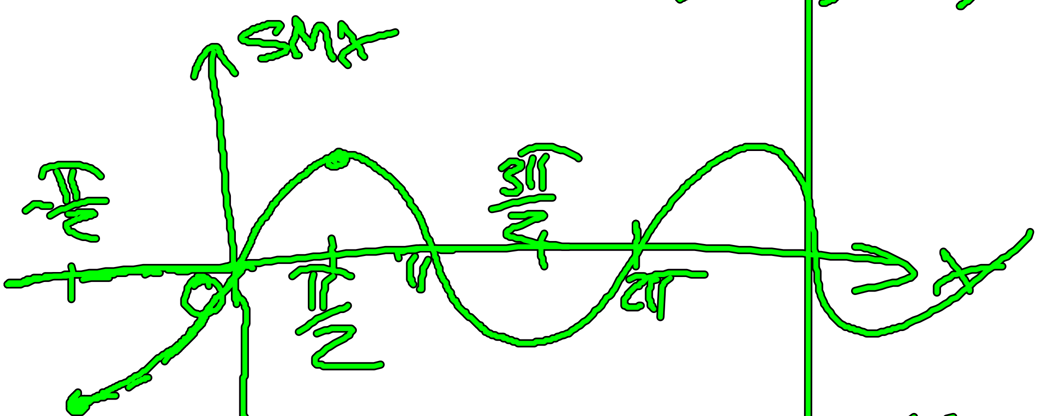
$$= \frac{x \ln a}{\ln a} = x$$

o.k.

3) Arcusfunktionen

→ Umkehrfunktionen von trigonometrischen Funktionen

sin, cos, tan, cot

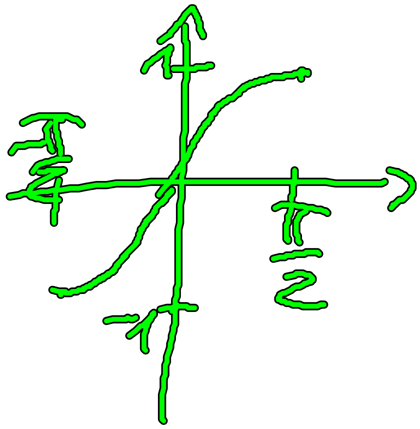


nicht injektiv!

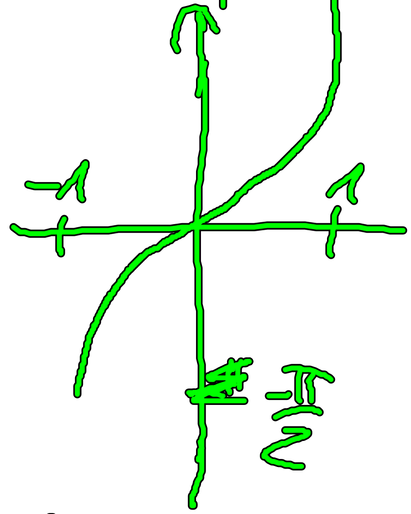
→ Umkehrung nur auf Intervallen möglich

z.B. für Sinus: man benutzt $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

→ Umkehrung heißt Arcussinus



Sinus



Arcussinus

1.2. Differentiation

z.B. Ort → Geschwindigkeit → Beschleunigung

Ableitung von f an der Stelle x

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{df}{dx}$$

z.B. $f(x) = x^2$

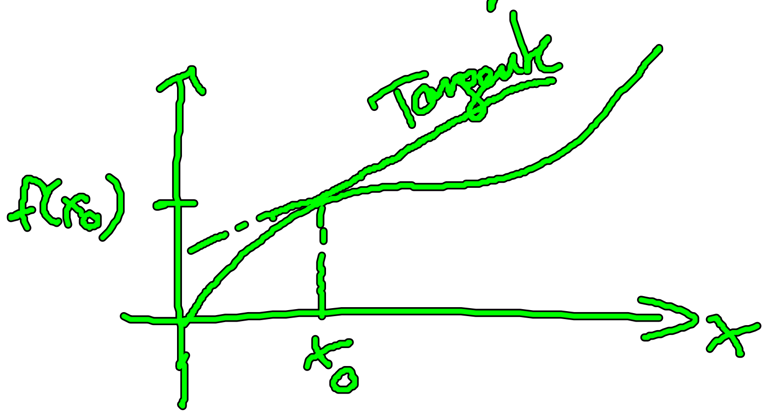
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

f heißt an der Stelle x differenzierbar, falls der Grenzwert existiert!

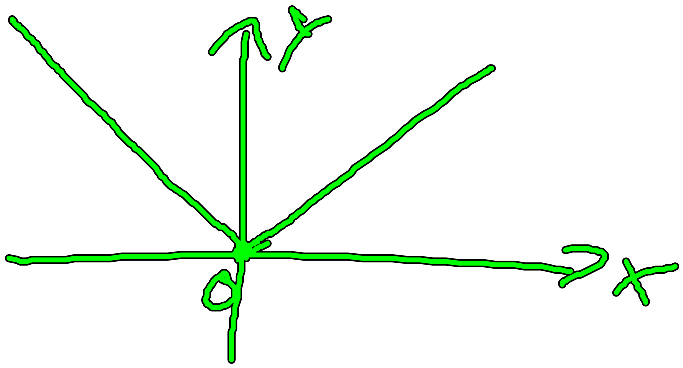
anschauliche Interpretation der Ableitung:
f'(x) entspricht Steigung der Tangente



Tangentengleichung:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Beispiel ~~ei~~ für nicht differenzierbar:



$f(x) = |x|$

f ist stetig, aber nicht differenzierbar bei $x = 0$!

Ableitungsregeln für zusammengesetzte Funktionen

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei überall differenzierbare Funktionen

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$ Produktregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$ Quotientenregel (Voraussetzung: $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$)

Kettenregel:

$$g(f(x)) = (g \circ f)$$

Verkettungssymbol

$$\big(g(f(x))\big)' = (g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

$$= g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

äußere Funktion ableiten, innere stehenlassen

„mal"

innere Funktion ableiten

Folgerung aus der Kettenregel

speziell für $g(x) = f^{-1}(x)$

man weiß: $f^{-1}(f(x)) = x$

$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = 1$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ aus Definition der Umkehrfunktion

andererseits nach Kettenregel

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

„Umkehrregel"

$\Rightarrow$ Weg zur Berechnung von $f'(x)$ über die Umkehrfunktion

Beispiele

1) $\frac{d}{dx} a^x$?

benutze $a^x = e^{\ln(a^x)}$
$= e^{x \ln a}$

benutze nun Kettenregel.

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})'$$
$$= e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

äußere Funktion: e^y mit $y = x \ln a$

innere Funktion: $y = x \ln a$

2) Quotientenregel:

$\frac{d}{dx} \tan x$?

benutze: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3) Ableitung des Arcustangens

↳ Umkehrfunktion des Tangens auf dem Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$(\arctan x)' \overset{?}{=}$

Ausgangspunkt: $\tan(\arctan(x)) = x$

$(\tan(\arctan(x)))' = 1$

aus Beispiel 2):

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx} \arctan x}_{(\arctan x)'} = 1$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \cos^2(\arctan(x))$$

benutze noch:

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} \quad !$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}$$

$$= \frac{1}{1+(\tan(\arctan(x)))^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

!