Höhere Ableitungen

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f^{(2)}(x)$$

entsprechend: $$f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}}{dx^n} f(x)$$

falls das bei jedem x geht, dann heißt f(x) n-mal differenzierbar

falls die n-te Ableitung außerdem stetig ist, dann heißt f(x) n-mal stetig differenzierbar

I.3 Taylor-Entwicklung

Die Taylor-Reihe einer Funktion f(x) mit dem Entwicklungspunkt a ist definiert als

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Voraussetzung: f beliebig oft differenzierbar

Beachte: $T_f(x)$ konvergiert gegen $f(x)$, falls das sogenannte Restglied gegen 0 konvergiert

allgemein

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \overbrace{R_n(x)}^{\text{Restglied}}$$

Ausdruck auf der rechten Seite entspricht für $n \to \infty$ der Taylorreihe, falls $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Wichtige Beispiele

$f(x) = e^x$, es gilt $f^{(k)}(x) = e^x$

Betrachte Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x=0$

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

(da Konvergenz für alle x !)

weiteres Beispiel:

$f(x) = \sin x$

betrachte wieder Entwicklungspunkt $a=0$

$f'(x) = \cos x$

$f^{(2)}(x) = -\sin x\ , \quad f^{(3)}(x) = -\cos x\ , \quad f^{(4)}(x) = \sin x$

$f'(0) = 1\ , \quad f^{(2)}(0) = 0\ , \quad f^{(3)}(0) = -1, \dots$

$$T_f(x) = \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k$$

„Geometrische" Bedeutung der Taylorentwicklung: (um ~~…~~ Punkt a)

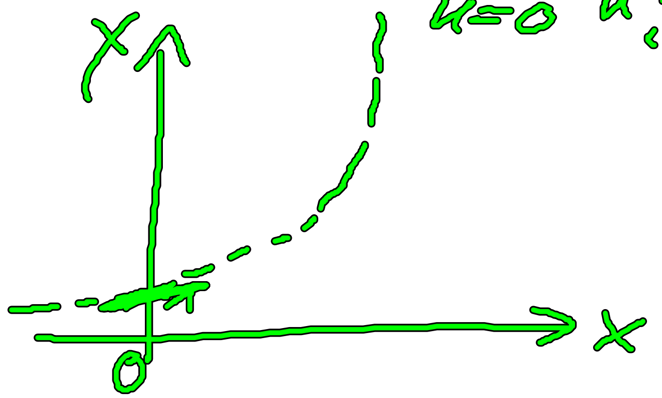
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots$$

Abbruch der Taylorreihe nach wenigen Termen $\Big\}$ Praxis!

„man entwickelt bis zur n-ten Ordnung"

$\Longleftrightarrow$ Approxi~~…~~miere die Funktion lokal durch ein Polynom!

z.B. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$



$= 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$

$\approx 1 + x$

Kann man funktionieren für $x \ll 1$

noch ein Beispiel:

Kinetische Energie eines relativistischen Teilchens

(Geschwindigkeit v ist dicht an der Lichtgeschwindigkeit) ← c

Gesamtenergie (Einstein)

$E = mc^2$, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Kinetische Energie

$E_{kin} = E - E_0$ mit $E_0 = m_0 c^2$ Ruheenergie

$$E_{kin} = mc^2 - m_0 c^2$$
$$= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

Sei nun $\frac{v}{c} \ll 1$

$\Rightarrow$ wir machen Taylorentwicklung des „Wurzelterms" um $x = \frac{v}{c} = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \underset{f(0)}{1} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x)\right)}_{f'(x)}\Bigg|_{x=0} \cdot x$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}(-2x)^2 - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2)\right)\Bigg|_{x=0} x^2$$
$$+ \mathcal{O}(x^3)$$

es gilt: $f'(0) = 0$, $f^{(2)}(0) = 1$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

approximieren: $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$ für $x \ll 1$

Einsetzen in E_{kin}

$$E_{kin} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

$$\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right) - 1 \right)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

o.k.!

I.4. Asymptotisches Verhalten, Grenzwerte

Häufig braucht man nur das Verhalten der Funktion bei sehr kleinen oder sehr großen Argumenten

Beispiel: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$\lim \quad \frac{\sin x}{} \quad 2$

$x \to 0 \quad x$.

Zwei Möglichkeiten:

a) benutze Taylorentwicklung des Sinus um $x=0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + O(x^4)\right)$$

$$= 1$$

b) Benutze Regeln von L'Hospital

1. Regel:

Betrachte 2 Funktionen f und g mit $f(x_0)=0$, $g(x_0)=0$ und $g'(x_0) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0

Dann folgt aus $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

auch $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

hier:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2. Regel von L'Hospital

Aus $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

folgt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Asymptotisches Verhalten

z.B. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, Verhalten für $x \to \infty$?

umschreiben:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\underbrace{\left(\frac{1}{(1+x^{-2})}\right)}_{g(y)=\frac{1}{1+y}}$$

mache Taylorentwicklung von $g(y)$ um $y=0$

benutze gleich die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3$$

$|y| < 1$

Einsetzen:

$$g(y) \approx 1 - y$$

$$\frac{1}{1+x^{-2}} \approx 1 - \frac{1}{x^2}$$

Einsetzen in $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \dots\right) \simeq \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

I.5. Komplexe Zahlen

Komplexe Zahl:

$z = x + iy$ mit x: „Realteil"

y: „Imaginärteil"

Spezialfälle

- $y = 0 \Rightarrow z$ ist eine reelle Zahl
- $x = 0 \Rightarrow z$ ist rein imaginär

$y = 1$, d.h. $z = i$ „imaginäre Einheit"

dabei $i^2 = -1$

d.h. $z = i$ ist Lösung der Gleichung $z^2 = -1$

Die andere Lösung ist $z^* = -i$

Konjugiert komplexe Zahl:

$z^* = x - iy$

Rechenregeln: Wiederholung auf den Übungszetteln

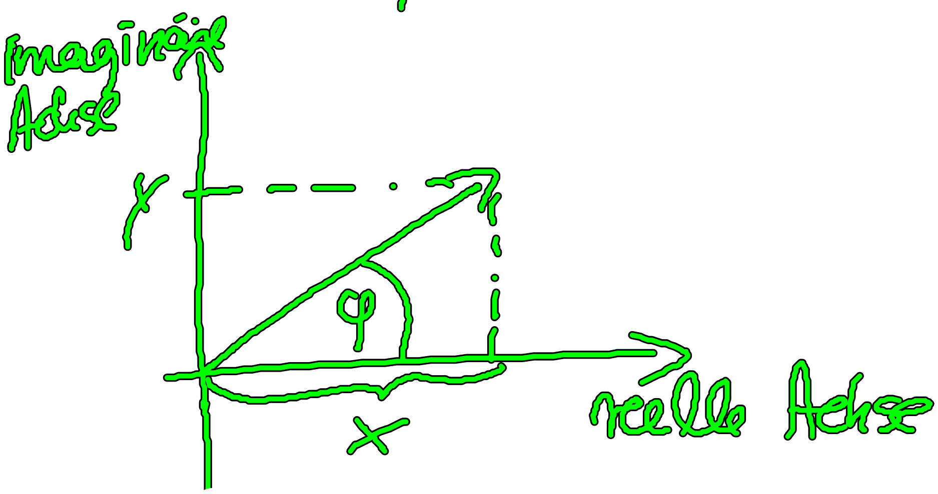
Wo sind die komplexen Zahlen in der Physik wichtig?

- Schwingungen: $z(t) = \underbrace{\cos\omega t}_{\text{Realteil}} + i\underbrace{\sin\omega t}_{\text{Imaginärteil}}$

  t: Zeit

  z.B. Gitterschwingungen der Atome in Festkörpern
- Elektrodynamische Wellen, z.B. Lichtwellen im Vakuum

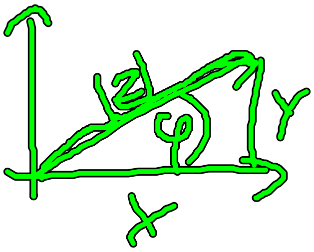
Darstellung in der „komplexen Zahlenebene"



Polardarstellung einer komplexen Zahl

$$z = |z|\, e^{i\varphi}, \quad |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$



$$\tan \frac{y}{x} = \varphi$$

Euler'sche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\Rightarrow z = |z| e^{i\varphi} = \underbrace{|z|\cos\varphi}_{x} + \underbrace{i|z|\sin\varphi}_{y}$$

Formel von Moivre: n-te Potenz von z

$$z^n = (x+iy)^n = \left(|z|e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n e^{in\varphi}$$
$$= |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

sei speziell $|z| = 1$

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n$$
$$= \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

Wurzel ziehen

sei $z^n = z_0$: z heißt die n-te Wurzel aus z_0

$$\Leftrightarrow z = z_0^{1/n}$$

Beispiel: $z^n = 1$

$$\longrightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{n}k} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Test: $z^n = e^{i2\pi k}$

$= 1$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

o.k.

II. Gewöhnliche Differentialgleichungen

II.1. Motivation, Einführung

i) Dynamische Grundgleichungen in der Physik haben die Form von Differentialgleichungen!

z.B. Mechanik: Bewegung eines Massenpunkts

z.B. Newtonsche BWGL (Bewegungsgleichung)

$$\boxed{m \underbrace{\frac{d^2}{dt^2} x(t)}_{a(t):\ \text{Beschleunigung}} = F(t)}$$

Quantenmechanik:

Dynamik der Wellenfunktion eines Teilchens $\psi(x,t)$

Ort — Zeit

Zeitabhängige Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\,\psi(x,t)$$

mit $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$

Hamiltonoperator

zum Beispiel!

- Elektrodynamik.

Grundgrößen: Elektromagnet. Feld

z.B. Magnetfeld $\underline{B}(\underline{r},t)$

Ortsvektor

elektr. Feld $\underline{E}(\underline{r},t)$

$\Longrightarrow$ Maxwellgleichungen

$$-\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}(\underline{r},t) = \underbrace{\nabla \times \underline{E}(\underline{r},t)}_{\text{Rotation von } \underline{E}}$$

- Gewöhnl. Differentialgleichung:

- enthält Ableitung nach
  einer Variable

- Partielle Differentialgleichungen
  - enthält Ableitung nach mehreren Variablen