Differentialgleichungen (DGL)

z.B. $m\ddot{x}(t) = F(t)$ Newton'sche Bewegungsgleichung

„gewöhnliche DGL"

Quantenmechanik ← Wellengleichung

Schrödingergleichung $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right)\psi$

$\Delta \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ in 1 Dimension

„partielle DGL"

Weitere Merkmale

- einzelne DGL oder System von DGL
- lineare DGL oder nichtlineare DGL
- Ordnung der DGL: bestimmt durch die höchste auftretende Ableitung.

II.2. Gewöhnliche DGL erster Ordnung

explizit:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

vorgegeben: $f(x,y)$, gesucht: $y(x)$

Beispiel: $y'(x) = x^2 + 2\sin(xy)$

Bemerkung:

Falls f nur von x abhängt, d.h. $y'(x) = f(x)$, dann folgt die Lösung aus einer einfachen Integration

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dx' \, f(x') + C$$

x_0: Anfangswert

C festgelegt durch $y(x_0)$

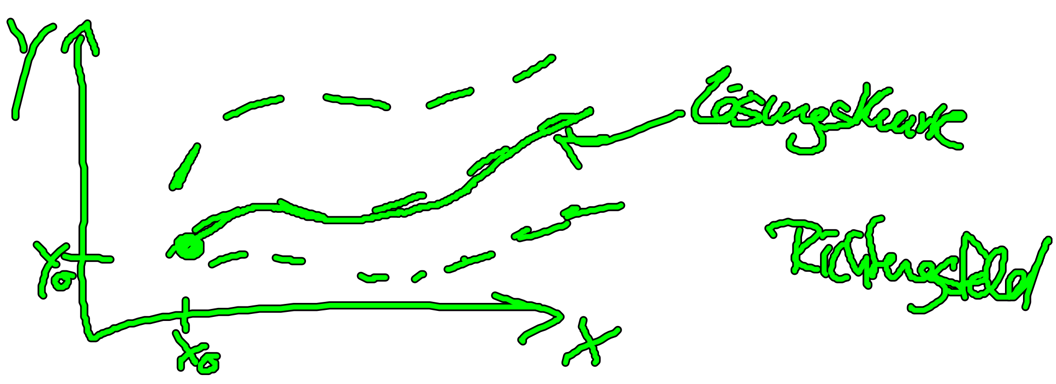
Beispiel: $y'(x) = x^3 + \cos x$

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \sin x - \frac{1}{4}x_0^4 + \sin x_0 + C$$

Betrachte nun den Fall $\boxed{y' = f(x,y)}$

Geometrische Interpretation

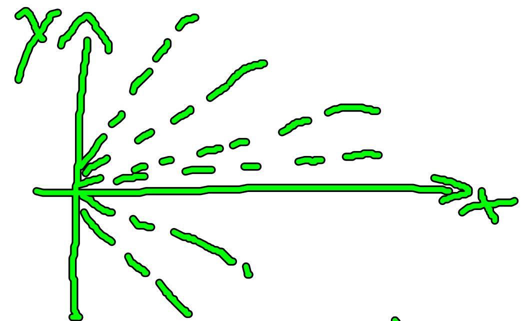
Richtungsfeld: In jedem Punkt (x,y) definiert $f(x,y)$ eine Steigung. Die Gesamtheit der Steigungen definiert das Richtungsfeld



Die Funktion $y(x)$ entspricht dann einer der Kurven, die in jedem Punkt die vorgegebene Steigung hat.

Die Wahl der Lösungskurve wird festgelegt durch die Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$



Beispiel: $y' = \frac{y}{x}$

Lösungen $y(x) = Cx$, denn $y' = C = \frac{y}{x}$ ✓✓

II.2.1. $\underbrace{\text{DGL}}_{\text{1. Ordnung}}$ mit getrennten Variablen

→ Form: $\boxed{y'(x) = f(x)\,g(y)}$ (*)

Faktorisierung der „rechten Seite" bezgl. x und y

1) Suche Nullstellen von $g(y)$ suchen $\Rightarrow y_1, y_2, y_3$ etc.

   $\Rightarrow$ Die konstanten Funktionen y_1, y_2 etc. sind Lösungen der DGL

2) nehme nun, daß $g(y) \neq 0$:

   umschreiben von (*): $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

„Trennung der Variablen"

(Separation der Variablen)

Linke Seite: hängt nur von y ab

Rechte " " " " x ab

$\Rightarrow$ Integriere auf beiden Seiten:

$$\int \frac{dy'}{g(y')} = \int dx'\, f(x')$$

Realisierung der Anfangsbedingungen

$$y(x_0) \overset{!}{=} y_0$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} dx'\, f(x') \quad (**)$$

auflösen nach $y(x)$ — fertig!

etwas ausgedrückt:

Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$

und $\Phi(y)$ " von $\frac{1}{g(y)}$

$\Rightarrow$ aus (**) $\Phi(y) - \Phi(y_0) = F(x) - F(x_0)$

$$\Leftrightarrow \Phi(y) = F(x) + \underbrace{\Phi(y_0) - F(x_0)}_{C}$$

Umkehrfunktion

$$\rightarrow y(x) = \Phi^{-1}\left(F(x) + C\right)$$

Lösung der DGL

Beispiel:

$y'(x) = y^2$ Anfangsbedingung: $x_0 = 0$

$y(0) = y_0 > 0$

d.h. $f(x) = 1$

$g(y) = y^2$

wir haben:

$y'(x) = f(x)\,g(y)$

Damit: $F(x) = x$

$\Phi(y) = -\frac{1}{y}$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(y) = -\frac{1}{y}$$

denn $\Phi^{-1}(\Phi(y)) = -\dfrac{1}{(-1/y)} = y$ ✓

$$c = \Phi(x_0) - \underbrace{F(x_0)}_{0} = -\frac{1}{x_0}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{y}}_{\Phi(y)} = \underset{F(x)}{x} - \underbrace{\frac{1}{y_0}}_{c} \Rightarrow y = \frac{y_0}{1 - y_0 x}$$

$$= \frac{y_0 x - 1}{y_0}$$

weiteres Beispiel:

$y'(x) = e^y \sin x$

nichtlineare DGL 1. Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = e^y \sin x \longrightarrow \frac{dy}{e^y} = dx \sin x$$

$$\underbrace{}_{dy\, e^{-y}}$$

$$\int_{y_0}^{y} dy\, e^{-y'} = \int_{x_0}^{x} dx' \sin x'$$

$$\left[e^{-y}\right]_{y_0}^{y} = \left[\cos x\right]_{x_0}^{x} \Leftrightarrow -e^{-y} + e^{-y_0} = -\cos x + \cos x_0$$

auflösen nach $y(x)$:

$$e^{-y} = \cos x + c$$

mit $c = -\cos x_0 + e^{-y_0}$

$$\Rightarrow y(x) = -\ln(\cos x - c)$$

II.2.2. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Lineare DGL sind höchstens linear in der Lösungsfunktion

einfaches Beispiel:

$$y'(x) = \lambda\, y(x) \quad \text{mit } \lambda = \text{const} \in \mathbb{R}$$

z.B. radioaktiver Zerfall

$N(t)$: Zahl der zur Zeit t noch nicht zerfallenen Atome

$$N'(t) = \frac{dN(t)}{dt} = -\alpha N(t)$$

---

zurück zu $y'(x) = \lambda y(x)$

Lösung: $y(x) = C e^{\lambda x}$ $\quad C = \text{const}$

denn $y'(x) = C e^{\lambda x} \lambda$

$= \lambda y(x)$ $\quad$ o.k.

mit Anfangsbedingung

$$y(x_0) \overset{!}{=} y_0$$

$$\Leftrightarrow C e^{\lambda x_0} = y_0 \Leftrightarrow C = y_0 e^{-\lambda x_0}$$

$$\Rightarrow y(x) = y_0 e^{\lambda(x - x_0)}$$

löst die DGL zur Anfangsbedingung

allgemeine Form einer linearen DGL:

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)}$$

inhomogene lineare DGL 1. Ordnung

wobei sind $a(x)$ und $b(x)$ fest vorgegeben, $y(x)$ ist gesucht

Sprechweise:

- Die Funktion heißt „Inhomogenität"
- Die Gleichung $y'(x) = a(x)\,y(x)$ heißt die zugehörige homogene Gleichung

Beispiel aus der klassischen Mechanik

betrachte ein Teilchen, das sich mit Geschwindigkeit $v(t)$ unter Einfluß einer äußeren Kraft $F^a(t)$ sowie einer Reibungskraft $F^r(t)$ bewegt (Bewegung in einer Dimension)

Frage: Geschwindigkeit als Funktion der Zeit?

nach Newton

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F^a(t) + F^r(t)$$

Annahme: „Stokes'sche Reibung"

$$F^r(t) = -\gamma \, v(t)$$

Reibungskonstante

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F^a(t) - \gamma \, v(t)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m} v(t) + \underbrace{\frac{1}{m} F^a(t)}_{\text{Inhomogenität}}$$

Zurück zur allgemeinen Form

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x)$$

<u>Lösungsstrategie</u>:

1) Löse zunächst die zugehörige homogene Gleichung

$$y'(x) = a(x)\, y(x)$$

Das ist eine DGL mit getrennten Variablen!

(mit $g(y) = y$)

$$\int \frac{dy'}{y'} = \int dx'\, a(x')$$

$$\ln y = A(x) + \tilde{c}$$ mit $A(x)$: Stammfunktion von $a(x)$

$$\Rightarrow y(x) = e^{A(x) + \tilde{c}}$$

$$= \underline{c\, e^{A(x)}}$$ mit $c = e^{\tilde{c}}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

mit Anfangsbedingung. Sei $y(x_0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{y'} = \int_{x_0}^{x} dx'\, a(x') \Rightarrow \ldots \Rightarrow y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} dx'\, a(x')}$$

~~Schritt 2)~~

Betrachte nun die inhomogene Gleichung

(keine DGL mit getrennten Variablen)

aber („Trost"):

Wir brauchen nur eine einzige (spezielle) Lösung der inhomogenen DGL zu finden!

Denn für die allgemeine Lösung der vollen DGL gilt:

$$y(x) = \underbrace{c\varphi(x)}_{\text{allgemeine Lösung der homogenen DGL}} + \psi(x)$$

$\uparrow$ spezielle Lösung der inhomogenen DGL

hier kein Beweis. Zeige nur, dass obiger Ansatz tatsächlich die volle DGL erfüllt.

$$(\psi + c\varphi)' = \psi' + c\varphi'$$

$$= \underbrace{a(x)\psi(x) + b(x)}_{\psi' \text{ nach Voraussetzung}} + \underbrace{a(x)c\varphi(x)}_{c\varphi'}$$

$$= a(x)\Big(\underbrace{c\varphi(x) + \psi(x)}_{\psi + c\varphi}\Big) + b(x)$$

Frage jetzt: Wie findet man eine spezielle Lösung ψ der inhomogenen DGL?

Zu lösen:

$$\varphi' = a(x)\varphi + b(x)$$

nehme wieder an, daß $A(x)$ Stammfunktion von $a(x)$

$\Longrightarrow$ Lösungsansatz:

$$\varphi(x) = u(x)\, e^{A(x)}$$

statt der Konstanten c in der allgemeinen Lösung der homogenen DGL taucht hier eine Funktion $u(x)$ auf!

bestimme nun $u(x)$ so, daß φ die inhomogene DGL erfüllt

„Variation der Konstanten“

Damit $\varphi = u(x)e^{A(x)}$ wirklich Lösung ist, muß gelten:

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{u(x)e^{A(x)}}_{\varphi(x)}\Big) \stackrel{!}{=} a(x)\underbrace{u(x)e^{A(x)}}_{\varphi(x)} + b(x)$$

$$\frac{du(x)}{dx}e^{A(x)} + \cancel{u(x)e^{A(x)}\underbrace{\frac{dA}{dx}}} \stackrel{!}{=} \cancel{a(x)u(x)e^{A(x)}} + b(x)$$

$a(x)$

$$\frac{du}{dx} e^{A(x)} = b(x)$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} = e^{-A(x)} b(x) \quad !!$$

d.h. $u(x)$ ist Stammfunktion zu $e^{-A(x)} b(x)$

$$\Rightarrow u(x) = \int dx' e^{-A(x')} b(x') + \text{Const}$$

Ergebnis

Die spezielle Lösung der inhomogenen DGL sieht so aus (mit Anfangsbedingung $\psi(x_0) = \psi_0$)

$$\psi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} dx' a(x')} \cdot \left(\int_{x_0}^{x} d\xi \, e^{-\int_{x_0}^{\xi} d\xi' a(\xi')} b(\xi) + \underbrace{\psi(x_0)}_{\psi_0} \right)$$

Test, dass ψ tatsächlich die inhomogene DGL erfüllt:

$$\varphi'(x) = e^{A(x)-A(x_0)} \cdot a(x) \left(\int_{x_0}^{x} dt\, e^{-\int_{x_0}^{t} dt'\, a(t')} b(t) + \varphi(x_0) \right)$$

$$+ e^{A(x)-A(x_0)} \cdot e^{-(A(x)-A(x_0))} b(x)$$

$$= a(x)\varphi(x) + b(x)$$