9.7 Klausur:

→ ER 270

8.00 – 10.00

Abgabe der Übungszettel: ~~20.5.~~ 22.5.

← Box Eingang Physik Altbau

"Theoretische Physik IV" ~~ab~~ bis 10^{00}

Lineare inhomogene DGL 1. Ordnung

$$y'(x) = a(x)\,y(x) + \underset{\uparrow}{b}(x)$$

(inhomogenität

allgemeine Lösung:

$$y(x) = \underbrace{c\,\varphi(x)}_{\text{allgemeine Lösung der homogenen Gleichung}} + \psi(x)$$

$\longleftarrow$ spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\psi(x) = u(x)\, e^{A(x)}$$

„Variation der Konstanten"

(A(x) ist Stammfkt. von a(x))

$$\Rightarrow u(x) = \int_{x_0}^{x} dx'\, e^{-A(x')}\, b(x') + \text{const}$$

Kombinieren mit Ansatz für ψ

$$\Rightarrow \psi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} dx'\, a(x')} \cdot \left(\int_{x_0}^{x} dt\, e^{-\int_{t_0}^{t} dt'\, a(t')}\, b(t) + \underbrace{\psi(x_0)}_{\psi_0} \right)$$

mit Anfangsbedingung

$$\psi(x_0) = \psi_0$$

Beispiel

1) $y' = \underbrace{2x}_{a(x)} y + x^3$ ← Inhomogenität

Löse zunächst homogene Gleichung

$$y'(x) = 2xy$$

$$\Rightarrow y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} dx' 2x'}$$

$$= y_0 e^{(x^2 - x_0^2)} = c e^{x^2}$$

mit $c = y_0 e^{-x_0^2}$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (mit Anfangsbedingung $4(x_0) = 4_0$ und $x_0 = 0$

$$4(x) = e^{\int_0^x dx' 2x'} \cdot \left(\int_0^x dt\, e^{-\int_0^t dt' 2t'} \cdot t^3 + 4_0 \right)$$

lösbar!

2. Beispiel (Mechanik)

betrachte ein Teilchen mit „verallgemeinerter" Reibung und einer äußeren Kraft

$$\dot{v}(t) + \underbrace{\gamma(t)}\, v(t) = f(t)$$

äußere Kraft $\hat{=}$ Inhomogenität

v Geschwindigkeit

Zeitabhängige Reibungskonstante

homogenes Problem:

$$\dot{v}(t) = -\gamma(t)\, v(t)$$

$$\Rightarrow v(t) = C e^{-\int_0^t dt' \gamma(t')}$$

inhomogenes Problem

(Anfangsbedingung: Zur Zeit $t=0$ ist $4(0) = 4_0$

$$4(t) = e^{-\int_0^t dt' \gamma(t')} \cdot \left(\int_0^t dt' e^{\int_0^{t'} dt' \gamma(t')} f(t') + 4_0 \right)$$

Integral über die äußere Kraft

Beiträge der äußeren Kraft vom Zeitpunkt t' bis t

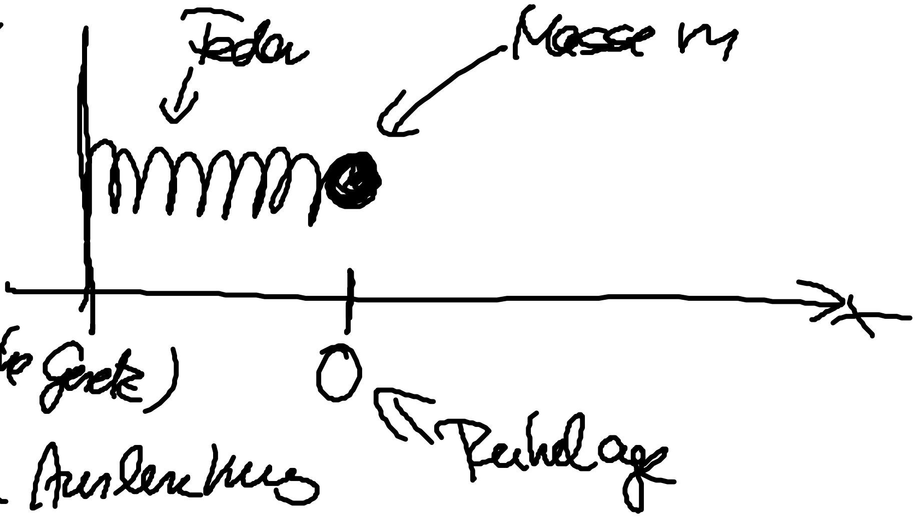
Der Einfluss der Kraft wird geregelt über den sogenannten „Propagator" $e^{+\int dt \gamma(t')}$

II.3. Systeme von Differentialgleichungen

Wo kommen solche Systeme vor?

a) Rückführung von DGL'S 2. Ordnung auf DGL 1. Ordnung

Beispiel Schwingung eines Massenpunktes an einer Feder



Auf die Masse wirkt die Federkraft (Hook'sche Gesetz)

$$F = -\underset{\text{Federkonstante}}{k}\,x \leftarrow \text{Auslenkung}$$

Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

$$\hookrightarrow \frac{d^2x}{dt^2}$$

Lineare DGL 2. Ordnung!

Führe formal den Impuls des Teilchens ein

$p(t) = m\,\dot{x}(t)$

Es gilt: $\dot{x}(t) = \frac{1}{m}\,p(t)$ (folgt aus Definition des Impulses)

$\dot{p}(t) = -k\,x(t)$ (Newton)

$\Rightarrow$ 2 DGL *erster Ordnung*

aber: Die beiden DGL sind *gekoppelt*!

(da beide Variablen, $x(t)$ und $p(t)$ in beide Gleichungen eingehen!)

allgemein:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

gesucht: $y(x)$, $y'(x)$!

Das Gleichungsystem

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = f(x, y_1, y_2) \quad \text{mit} \quad y_1 = y(x), \; y_2 = y'(x)$$

heißt das zugehörige System 1. Ordnung

Beachte: Für eine eindeutige Lösung benötigt man jetzt zwei Anfangsbedingungen, nämlich $y_0 = y(x_0)$

$y'(x_0)$

b) Gekoppelte Systeme von DGL treten z.B. auch auf

- bei der Mechanik (oder Quantenmechanik vieler Teilchen

⇒ Kopplung der entsprechenden Bewegungsgleichungen durch Wechselwirkungen zw. den Teilchen

↪ z.B. Coulomb-Kräfte
Gravitations - "
gekoppelte Schwingungen

oder! Wenn die Grundgleichungen mehrere Variablen beinhalten

z.B. Maxwell'sche Gleichungen

1) Induktionsgesetz:

elektr. Feld ↘ ↙ Magnetfeld

$$\underline{\nabla \times \underline{E}} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

1. Ableitung im Ort ← Rotation

2)

Strom ↓

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

mit $\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$

$\underline{H} = \mu^{-1} \underline{B}$

II. 4. Lineare DGL. 2. Ordnung

allgemein:

$$y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x)$$

↑ Inhomogenität

$b(x) = 0$

→ zugehörigen homogenen Gleichung

Lösungsstrategie

- Finde zunächst allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$
- Die Funktion $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ bilden ein „Fundamentalsystem"
- Danach: Addiere darauf eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ... .

Wir betrachten nun den Spezialfall ~~und~~ einer homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

d.h. $b(x) = 0$, $a_1(x) = a_1$

$a_0(x) = a_0$

$$\Rightarrow y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

z.B. Schwingung des Massenpunktes:

$$y(x) \longrightarrow x(t)$$

Auslenkung zur Zeit t

mit Reibung:

$$\circledast \quad m\ddot{x}(t) = -k\,x(t) \underbrace{-\gamma\,\dot{x}(t)}_{\text{Reibungskraft}}$$

„Oszillator mit Reibung“

oder auch „gedämpfter harmonischer Oszillator“

Lösung

Ausgangspunkt ist folgender Ansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Einsetzen in $\circledast$ $\Rightarrow$ $m\lambda^2 e^{\lambda t} = -k e^{\lambda t} - \gamma \lambda e^{\lambda t}$

multipliziere beide Seite mit $e^{-\lambda t}$

$$\boxed{m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0}$$

„charakteristische Gleichung“

quadratisch in λ

$\Rightarrow$ Lösung durch quadratische Ergänzung

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

man muß Fallunterscheidung machen
je nachdem, ob der Term unter der
Wurzel positiv, negativ oder Null ist

⇒ Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann ist das Fundamentalsystem
der homogenen Gleichung definiert durch

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$$

Betrachte zunächst den ungedämpften Fall

d.h. $\gamma = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}$, mit k Federkonstante

$k > 0$!

$$= \pm \sqrt{\frac{k}{m}(-1)}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{-1} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i \quad !$$

komplex

$\lambda_{1,2}$ sind also rein imaginäre Zahlen

Erinnerung:

$$z = x + i\underset{\nwarrow}{y}$$

imaginärteil

Notation:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung für diesen Fall:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

„harmonische Schwingung"
(ω heißt Schwingungsfrequenz)

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$
$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$$

$$\Rightarrow x(t) = (c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\sin\omega t$$
$$= c'\cos\omega t + i\,c''\sin\omega t$$

2) „Starke Reibung"

d.h. γ ist so groß, daß

$$\underbrace{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}_{\text{Term unter Wurzel}} > 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{\gamma}{2m} \pm \overbrace{\sqrt{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}_{\text{reell}}}}^{< \frac{\gamma}{2m}}}_{\text{negativ!}}$$

einsetzen

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

mit $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$

„exponentiell abklingende Lösung"