9.7 Klausur:

→ ER 270

8.00 – 10.00

Abgabe der Übungszettel: ~~20.5.~~ 22.5.

← Box Eingang Physik Altbau

„Theoretische Physik IV" ~~ab~~ bis 10^{00}

Lineare inhomogene DGL 1. Ordnung

$$y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$$

(inhomogenität)

allgemeine Lösung:

$$y(x) = \underbrace{c\,\varphi(x)}_{\text{allgemeine Lösung der homogenen Gleichung}} + \psi(x)$$

spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\psi(x) = u(x)\, e^{A(x)}$$

„Variation der Konstanten"

($A(x)$ ist Stammfkt. von $a(x)$)

$$\Rightarrow u(x) = \int_{x_0}^{x} dx'\, e^{-A(x')}\, b(x') + \text{const}$$

Kombinieren mit Ansatz für ψ

$$\Longrightarrow \psi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} dx'\, a(x')} \cdot \left(\int_{x_0}^{x} dt\, e^{-\int_{t_0}^{t} dt'\, a(t')}\, b(t) + \underbrace{\psi(x_0)}_{\psi_0} \right)$$

mit Anfangsbedingung

$$\psi(x_0) = \psi_0$$

Beispiel

1) $y' = \underbrace{2x}_{a(x)} y + x^3$ ← Inhomogenität

Löse zunächst homogene Gleichung

$y'(x) = 2xy$

$$\rightarrow y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} dx' \, 2x'}$$

$$= y_0 e^{(x^2 - x_0^2)} = c e^{x^2}$$

mit $c = y_0 e^{-x_0^2}$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

(mit Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $x_0 = 0$)

$$y(x) = e^{\int_0^x dx' 2x'} \cdot \left(\int_0^x dt \, e^{-\int_0^t dt' 2t'} \cdot t^3 + y_0 \right)$$

lösbar!

~~2~~ 2. Beispiel (Mechanik)

betrachte ein Teilchen mit „verallgemeinerter" Reibung und einer äußeren Kraft

$$\dot{v}(t) + \underbrace{\gamma(t)}_{\text{Zeitabhängige Reibungskonstante}} v(t) = f(t)$$

äußere Kraft $\hat{=}$ Inhomogenität

v Geschwindigkeit

homogenes Problem:

$$\dot{v}(t) = -\gamma(t)\, v(t)$$

$$\rightarrow v(t) = C e^{-\int_0^t dt' \gamma(t')}$$

inhomogenes Problem

(Anfangsbedingung: Zur Zeit $t=0$

ist $v(0) = v_0$

$$v(t) = e^{-\int_0^t dt' \gamma(t')} \left(\int_0^t dt' e^{\int_0^{t'} dt' \gamma(t')} f(t') + v_0 \right)$$

Integral über die

äußere Kraft

Beiträge der äußeren Kraft vom Zeitpunkt t' bis t

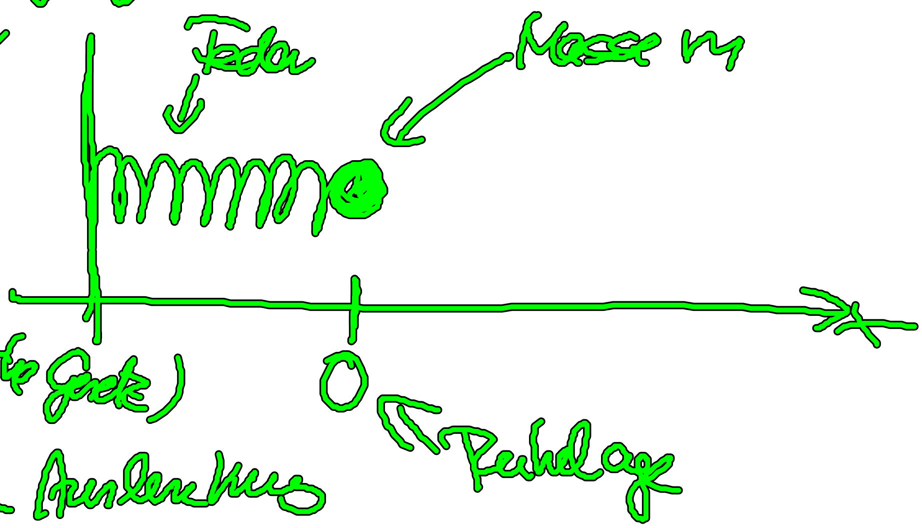
Der Einfluss der Kraft wird geregelt über den sogenannten „Propagator" $e^{+\int dt \gamma(t')}$

II.3. Systeme von Differentialgleichungen

Wo kommen solche Systeme vor?

a) Rückführung von DGL'S
2. Ordnung auf DGL 1. Ordnung

Beispiel: Schwingung eines Massenpunktes an einer Feder



Auf die Masse wirkt die Federkraft (Hooke'sche Gesetz)

$$F = -kx$$

k: Federkonstante, x: Auslenkung

Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

$\ddot{x} \to \frac{d^2x}{dt^2}$

Lineare DGL 2. Ordnung!

Führe formal den Impuls des Teilchens ein

$p(t) = m\,\dot{x}(t)$

Es gilt: $\dot{x}(t) = \frac{1}{m}\,p(t)$ (folgt aus Definition des Impulses)

$\dot{p}(t) = -k\,x(t)$ (Newton)

$\Rightarrow$ 2 DGL erster Ordnung

aber: Die beiden DGL sind gekoppelt!

(da beide Variablen, $x(t)$ und $p(t)$ in beide Gleichungen eingehen!)

allgemein:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

gesucht: $y(x)$, $y'(x)$!

Das Gleichungssystem

$$y_1' = y_2$$

$y_2' = f(x, y_1, y_2)$ mit $y_1 = y(x)$

$y_2 = y'(x)$

heißt das zugehörige System 1. Ordnung

Beachte: Für eine eindeutige Lösung benötigt man jetzt zwei Anfangsbedingungen, nämlich $y_0 = y(x_0)$

$y'(x_0)$

b) Gekoppelte Systeme von DGL treten z.B. auch auf

- bei der Mechanik (oder Quantenmechanik) vieler Teilchen

$\Rightarrow$ Kopplung der entsprechenden Bewegungsgleichungen durch Wechselwirkungen zw. den Teilchen

$\hookrightarrow$ z.B. Coulomb-Kräfte

Gravitations - "

gekoppelte Schwingungen

oder: Wenn die Grundgleichungen mehrere von allen beinhalten

z.B. Maxwell'sche Gleichungen

1) Induktionsgesetz:

elektr. Feld Magnetfeld

$$\underbrace{\nabla \times \underline{E}}_{\text{Rotation}} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

1. Ableitung im Ort ← Rotation

2)

Strom

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

mit $\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$

$\underline{H} = \mu^{-1} \underline{B}$

II.4. Lineare DGL. 2. Ordnung

allgemein:

$$y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x)$$

Inhomogenität

$b(x) = 0$

→ zugehörigen homogenen Gleichung

Lösungsstrategie

- Finde zunächst allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$

- Die Funktion $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ bilden ein „Fundamentalsystem"

- Danach: Addiere darauf eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Wir betrachten nun den Spezialfall ~~und~~ einer homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

d.h. $b(x) = 0$, $a_1(x) = a_1$
$a_0(x) = a_0$

$$\Rightarrow y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

z.B. Schwingung des Massenpunktes:

$y(x) \longrightarrow x(t)$
Auslenkung zur Zeit t

mit Reibung:

$$(*)\quad m\ddot{x}(t) = -k\,x(t) \underbrace{-\gamma \dot{x}(t)}_{\text{Reibungskraft}}$$

„Oszillator mit Reibung"

oder auch „gedämpfter harmonischer Oszillator"

<u>Lösung</u>

Ausgangspunkt ist folgender Ansatz.

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Einsetzen in $(*)$ $\Rightarrow m\lambda^2 e^{\lambda t} = -k e^{\lambda t} - \gamma \lambda e^{\lambda t}$

multipliziere beide Seiten mit $e^{-\lambda t}$

$$\boxed{m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0}$$

„charakteristische Gleichung"

quadratisch in λ

$\Rightarrow$ Lösung durch quadratische Ergänzung

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

man muß Fallunterscheidung machen je nachdem, ob der Term unter der Wurzel positiv, negativ oder null ist

$\Rightarrow$ Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann ist das Fundamentalsystem der homogenen Gleichung definiert durch

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$$

Betrachte zunächst den ungedämpften Fall

d.h. $\gamma = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

, mit k Federkonstante

$k > 0$!

$$= \pm \sqrt{\frac{k}{m}(-1)}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{-1} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i \qquad !$$

Komplex

$\lambda_{1,2}$ sind also rein imaginäre Zahlen

Erinnerung:

$z = x + iy$ ← imaginär Teil

Notation:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung für diesen Fall:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

„harmonische Schwingung"
(ω heißt Schwingungs-Frequenz)

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$
$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$$

$$\Rightarrow x(t) = (c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\sin\omega t$$
$$= c'\cos\omega t + i c''\sin\omega t$$

2) „Starke Reibung"

d.h. γ ist so groß, daß

$$\underbrace{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}_{\text{Term unter Wurzel}} > 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{\gamma}{2m} \pm \overbrace{\sqrt{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}_{\text{reell}}}}^{< \frac{\gamma}{2m}}}_{\text{negativ!}}$$

einsetzen

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

mit $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$

„exponentiell abklingende Lösung"