II.4. Lineare homogene Systeme von DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffiziente

Erinnerung: Solche Systeme kommen z.B. zustande durch Umschreiben einer DGL 2. Ordnung (s. Kap. II.3)

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$\rightarrow \quad y_1' = y_2 \qquad \text{mit } y_1 = y(x)$$

$$y_2' = f(x, y_1, y_2) \qquad y_2 = y'(x)$$

Betrachte im Folgenden Systeme der folgenden Form:

$$y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n$$

$$y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n$$

$$\vdots$$

$y_n' = a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n$ für die n Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$

- homogenes System
- Die Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ konstant!

Neue Notation

Vektor $\underline{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ n-dimensionaler Vektor

Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

außerdem: Vektor $\underline{y}'(x)$

Umschreiben des System aus DGL

$$y_\alpha'(x) = \sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta} \, y_\beta(x)$$

α-Komponente des Vektors $\underline{y}'(x)$, $\alpha = 1, \ldots, n$

β-Komponente des Vektors $\underline{y}(x)$

$(\alpha\beta)$-Element von $\underline{\underline{A}}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{y}'(x) = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(x)}$$

entsprechend wäre $\underline{y}'(x) = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(x) + \underline{b}(x)$

ein inhomogenes System

Vektor

Wir fokussieren nun auf den Fall $\underline{b} = 0$

Spezialfall $n=1$

$$y'(x) = a\,y(x) \Longrightarrow y(x) = c_0 e^{ax}$$

wie schon bekannt

allgemeine Lösung ist offensichtlich Exponentialfunktion.

$\underline{n>1}$

entsprechender Lösungsansatz:

$$\underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\,\underline{c}_0$$

Konstanter Vektor

Dabei ist die Exponentialfunktion einer Matrix folgendermaßen definiert

$$e^{\underline{\underline{A}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\underline{\underline{A}}\right)^k$$

Potenzreihe

k-fache Matrixprodukt

$$= 1 + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}} + \ldots$$

und $$e^{\underline{\underline{A}}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\underline{\underline{A}})^k x^k$$

Zeige nun, daß der Ansatz die DGL erfüllt

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\underline{\underline{A}}x}\underline{c}_0\right) = \left(\frac{d}{dx}e^{\underline{\underline{A}}x}\right)\underline{c}_0$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\underline{\underline{A}})^k x^k\right)\underline{c}_0$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\underline{\underline{A}})^k k\, x^{k-1}\right)\underline{c}_0$$

$k! = k(k-1) \cdot \ldots$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\underline{\underline{A}})^k k\, x^{k-1}\right)\underline{c}_0$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{k-1} x^{k-1}\right)\underline{c}_0$$

$$= \underline{\underline{A}}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}(\underline{\underline{A}})^{k-1} x^{k-1}\right)}_{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\underline{\underline{A}})^m x^m}\underline{c}_0$$

mit $m = k-1$

$$e^{\underline{\underline{A}}x}$$

$$= \underline{\underline{A}} \underbrace{e^{\underline{\underline{A}}x} \underline{c}_0}_{\underline{y}(x)} = \underline{\underline{A}}\, \underline{y}(x) \qquad \text{q.e.d!}$$

Wie wertet man nun die Exponentialfunktion $e^{\underline{\underline{A}}x}$ praktisch aus?

Dazu kurze Wiederholung aus der Linearen Algebra

a) Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ Matrix. Ihre Eigenwerte und Eigenvektoren sind definiert durch die Gleichung

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{e} = \lambda \underline{e}$$

Eigenwert

Eigenvektoren (n-dimensional)

Das ist ein homogenes, lineares Gleichungssystem. Dies hat genau dann eine Lösung, falls

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$$

(dabei benutzt: $\underline{\underline{A}}\, \underline{e} = \lambda \underline{e}$

$$\Leftrightarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}})\underline{e} = 0$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$\uparrow$ Einheitsmatrix

$\rightarrow$ „charakteristisches Polynom"

$\rightarrow$ Polynom n-ten Grades in λ

Aus $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$ folgen die Eigenwerte

$\hat{=}$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Bestimmung der Eigenvektoren:

Löse für jedes λ_α $(\alpha = 1, \dots, n)$

das lineare Gleichungssystem

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_\alpha \underline{\underline{1}})\underline{e}_\alpha = 0$$

b) Hauptachsentransformation

Annahme: Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix seien bekannt $\leftarrow$ $n \times n$-Matrix

Bilde aus Eigenvektoren die Matrix $\underline{\underline{T}} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

d.h. Die Spalten von T entsprechen gerade den Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$!

Dann gilt (hier ohne Beweis)

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$$

Inverse der Matrix $\underline{\underline{T}}$

und $\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $n \times n$-Matrix

$$\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{T}}}_{\underline{\underline{1}}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$$

multipliziere von rechts mit $\underline{\underline{T}}$

$$\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}}$$

Wozu ist ~~dazu~~ das gut?

Wir hatten als Lösungsansatz in der DGL:

$$\underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\,\underline{c}_0$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} \text{ ansetzen}$$

$$\rightarrow \underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} x}\,\underline{c}_0$$

verwende:

$$e^{\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}\right)^k x^k$$

$$\left(\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}\right)^k =$$

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\,\underline{\underline{T}}}_{\underline{\underline{1}}}\,\underline{\underline{D}}\,\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\,\underline{\underline{T}}}_{\underline{\underline{1}}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} \cdots$$

$$= \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}^k\,\underline{\underline{T}}^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}^k\,\underline{\underline{T}}^{-1} x^k$$

$$= \underline{\underline{T}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{\underline{D}}^k x^k \right) \underline{\underline{T}}^{-1}$$

$$= \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}} x}\, \underline{\underline{T}}^{-1}$$

$$e^{\underline{\underline{D}} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{\underline{D}}^k x^k$$

$\underline{\underline{D}}$ ist diagonal

$$\Rightarrow \underline{\underline{D}}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Folgerung:

$$e^{\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} x} = \underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \underline{\underline{T}}^{-1}$$

insgesamt:

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL kann wie folgt angegeben werden.

$$\underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}} x} \underline{c}_0$$

$$= \underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{c}_0$$

wobei $\underline{\underline{T}}$ durch die Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ definiert ist und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ sind!

geschlossener Ausdruck!

jede Komponente des Lösungsvektors
$\underline{y}(x)$ ist eine Linearkombination
von Exponentialfunktionen!

Beachte:
Alternativ hätten wir auch „einfach" mit folgendem
Lösungsansatz für die DGL $\underline{y}'(x) = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$
starten können.

$$\underline{y}(x) = \underline{e}\, e^{\lambda x}$$

wobei der Vektor $\underline{e}$ und die Zahl λ
noch unbekannt sind

Einsetzen in die DGL

$$\underline{y}'(x) = \underline{e}\,\lambda e^{\lambda x}$$
$$= \lambda\,\underline{y}(x) \stackrel{!}{=} \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda\,\underline{e}\,e^{\lambda x} = \underline{\underline{A}}\,\underline{e}\;e^{\lambda x} \quad \Big|\, e^{-\lambda x}$$

$$\boxed{\lambda \underline{e} = \underline{\underline{A}}\, \underline{e}}$$

Das ist wieder die „alte" Eigenwertgleichung für $\underline{\underline{A}}$!

d.h. die Zahlen λ und Vektoren $\underline{e}$ entsprechen den Eigenwerten und Eigenvektoren der Matrix $\underline{\underline{A}}$

→ man findet n Lösungen

$$\underline{y}_\alpha(x) = \underline{e}_\alpha e^{\lambda_\alpha x}$$

$$\alpha = 1, \ldots, n$$

Wie verträgt sich mit der vorher gewonnenen allgemeinen Lösung?

Dazu muß man wissen.
Jede Linearkombination der $\underline{y}_\alpha(x)$ ist wieder Lösung der DGL!

Beispiel:

noch einmal gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\boxed{m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \gamma\dot{x}(t)}$$

lineare homogene DGL 2. Ordnung

Führe ein $\dot{x}(t) = \frac{1}{m}p(t)$ ← Impuls

$$\underbrace{\dot{p}(t)}_{m\ddot{x}(t)} = -kx(t) - \frac{\gamma}{m}p(t)$$ aus der Bewegungsgleichung

System aus 2 linearen, homogene DGL's 1. Ordnung!

$\Rightarrow$ Koeffizientenmatrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}$$

$$\underline{y}(x) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{\gamma}{m} - \lambda \end{vmatrix}$

$$= -\lambda\left(-\frac{\gamma}{m} - \lambda\right) - (-k)\cdot\frac{1}{m}$$

$$= \lambda\left(\frac{\gamma}{m} + \lambda\right) + \frac{k}{m} \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

— genau wie früher, als wir die DGL 2. Ordnung direkt gelöst haben

betrachte wieder den Fall $\gamma = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

und $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ Eigenvektoren: $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ mi\omega \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -mi\omega \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$\underline{y}(t) = C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ mi\omega \end{pmatrix} e^{i\omega t} + C_- \begin{pmatrix} 1 \\ -mi\omega \end{pmatrix} e^{-i\omega t} = \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

C_+, C_- Konstanten

(beachte: Ansatz erfüllt $p(t) = m\dot{x}(t)$)