Letztes Mal:

Systeme aus linearen DGL's 1. Ordnung
mit konstanten Koeffizienten

$$\underline{y}'(x) = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(x)$$

allgemeine Lösung

$$\underline{y}(x) = \underline{\underline{C}} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{c}_0$$

(Spalten von $\underline{\underline{C}}$ sind die EV von $\underline{\underline{A}}$)

„alternativ":

man startet mit Ansatz $\underline{y}(x) = \underline{e}\, e^{\lambda x} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{e} = \lambda \underline{e}$

dann: Kombination der Lösung für verschiedene Eigenwerte λ_α $(\alpha = 1, \dots, n)$

z.B. $\underline{y}(x) = b_1 \underline{y}_1(x) + b_2 \underline{y}_2(x) + \dots b_n \underline{y}_n(x)$

$$\Rightarrow \underline{y}'(x) = b_1 \lambda_1 \underline{y}_1(x) + b_2 \lambda_2 \underline{y}_2(x) + \dots + b_n \lambda_n \underline{y}_n(x)$$

$$= \underline{\underline{A}}\, b_1 \underline{y}_1(x) + \underline{\underline{A}}\, b_2 \underline{y}_2(x) + \dots$$

$$= \underline{\underline{A}}\, \underline{y}(x) \quad \checkmark$$

Ende Wiederholung

II.5. Lineare inhomogene Systeme 1. Ordnung

$\underline{y}'(x) = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}(x) + \underline{b}(x)$ mit $\underline{\underline{A}}$ $n\times n$-Matrix

$\underline{b}$ Inhomogenität

Vorgehen analog wie für den Fall $n=1$ (Kap II.2)

i) Löse zunächst das homogene Problem

$$\underline{\varphi}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\,\underline{c}_0$$

allgemeine Lösung für $\underline{b}=0$

erfüllt $\underline{\varphi}'(x) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\varphi}(x)$

ii) Suche eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu gegebenen Anfangsbedingungen

$\underline{\psi}(x_0) \overset{!}{=} \underline{\psi}_0$

Ansatz: $\underline{\psi}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\,\underline{u}(x)$

dann wieder „Variation der Konstanten"

Ergebnis: $\underline{u}(x)$ ist Stammfunktion von $e^{-\underline{\underline{A}}x}\,\underline{b}(x)$

es folgt:

$$\underline{\psi}(x) = e^{\underline{\underline{A}}x}\left(\int_{x_0}^{x} dt \left(e^{-\underline{\underline{A}}t}\,\underline{b}(t)\right) + \underline{\psi}_0\right)$$

II.6. Lineare Systeme aus DGL's 2. Ordnung

In der Physik sind solche Systeme sehr häufig!

Sehr wichtiges Beispiel

„Gekoppelte Schwingungen"

Klass. Mechanik, Festkörperphysik (Gitterschwingungen)
Molekülschwingungen

Zugehörige Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{N} k_{ij} x_j$$

Masse von Teilchen i

Beschleunigung von Teilchen i

wobei k_{ij} die „Kopplungsmatrix" ist

physikalisch: N gekoppelte Oszillatoren
ohne Reibung / Dämpfung

mathematisch: N-dimensionales, lineares System
von DGL zweiter Ordnung
mit konstanten Koeffizienten

mögliche Strategien:

— Umschreiben in 2N DGL's
erster Ordnung (für $x_i(t)$
und $p_i(t) = m_i \dot{x}_i(t)$)

— Starte direkt mit Exponentialfunktionsansatz
(s. Vorgehensweise in Kap II. 4. für $N=1$)

<u>spezialisiere auf den Fall $N=2$</u>

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_{11} x_1 + k_{12} x_2$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = k_{21} x_1 + k_{22} x_2$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{x}_1 = \overbrace{\frac{k_{11}}{m_1}}^{A_{11}} x_1 + \overbrace{\frac{k_{12}}{m_1}}^{A_{12}} x_2$$
$$\ddot{x}_2 = \overbrace{\frac{k_{21}}{m_2}}^{A_{21}} x_1 + \overbrace{\frac{k_{22}}{m_2}}^{A_{22}} x_2$$

definiere noch Vektor $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\ddot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}(t)$$

Lösungsansatz:

$$\underline{x}(t) = \underline{c}\, e^{-i\omega t}$$

Schwingungsfrequenz

Beachte: Das ist genau dieselbe Strategie wie beim System 1. Ordnung!

Die allgemeine Lösung ist dann eine Linearkombination der $\underline{x}(t)$ mit verschiedenen ω !

einsetzen in die DGL:

$$\ddot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} c_1 (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \\ c_2 (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \left(\text{mit } \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 (-\omega^2) e^{-i\omega t} \\ c_2 (-\omega^2) e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = -\omega^2 \underline{x}(t) \overset{!}{=} \underline{\underline{A}}\, \underline{x}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{A}}\, \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)}$$

Das ist offensichtlich wieder ein Eigenwertproblem!

(der Eigenwert ist jetzt $\lambda = -\omega^2$)

$\Rightarrow$ Die möglichen Lösungen für $(-\omega^2)$ folgen aus dem charakteristischen Polynom

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} + \omega^2 \underline{\underline{1}}) \overset{!}{=} 0$$

(hier: $\underline{\underline{A}}$ 2x2-Matrix: Eigenwerte sehr einfach zu bestimmen!)

$$\Rightarrow \quad -\omega^2 = \frac{A_{11}+A_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}A_{21}}$$

$\Rightarrow$ Es gibt insgesamt 4 Lösungen für ω!

$$\omega_1^+, \omega_1^-, \omega_2^+, \omega_2^-$$

mit $\omega_1^- = -\omega_1^+ \qquad \omega_2^- = -\omega_2^+$

Die Lösungen mit positivem Realteil (ω_1^+, ω_2^+) heißen <u>Eigenfrequenzen</u> (Normalfrequenzen)

einfachere Notation: ω_1, ω_2

Die zugehörigen Lösungen für $\underline{c}$ heißen Eigenmoden (oder auch „Normalmoden")

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{c}^{(1)}\left(\alpha_+ e^{i\omega_1 t} + \alpha_- e^{-i\omega_1 t}\right) + \underline{c}^{(2)}\left(\beta_+ e^{i\omega_2 t} + \beta_- e^{-i\omega_2 t}\right)$$

$\underline{c}^{(1)}$: Eigenmode zu ω_1, $\underline{c}^{(2)}$ die Eigenmode zu ω_2!

„trivialer Fall":

Die Massenpunkte sind „entkoppelt"

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{2} k_{ij} x_j$$

$$\begin{cases} k_{12} = k_{21} = 0 \\ k_{11} = -k_1 \, , \quad k_{22} = -k_2 \end{cases}$$

Federkonstante für Masse 1

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

Frequenzen:
$$-\omega^2 = \frac{A_{11}+A_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \; -\omega_1^2 = -\frac{k_1}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$-\omega_2^2 = -\frac{k_2}{m_2} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

$\Rightarrow$ Die Frequenzen ω_1, ω_2 entsprechen gerade den Schwingungsfrequenzen der einzelnen Oszillatoren!

— wie erwartet!

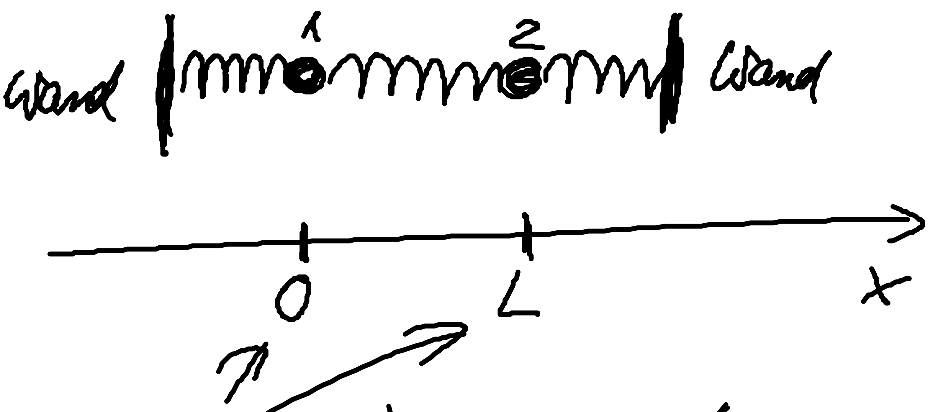
Die zugehörigen Eigenmoden sind

$$\underline{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auch hier sieht man die Entkopplung

nicht-trivialer Fall

Kopplung der beiden Massen ($m_1 = m_2 = m$)



alle drei Federn haben dieselbe Federkonstante K !

Ruhepositionen von Masse 1 und Masse 2

x_1, x_2 messen die Auslenkung von den Ruhelagen

Frage: Wie sieht jetzt die Kopplungsmatrix aus? (und damit die Matrix $\underline{\underline{A}}$)

Newton'sche BWG

$$m \ddot{x}_1 = -K x_1 - K(x_1 - x_2)$$
$$= -2K x_1 + K x_2$$

Kopplung: es kommt auf die relative Auslenkung ($x_1 - x_2$) an!

d.h. z.B. $x_1 = 0$ und $x_2 > 0$

$\Rightarrow$ Kraft nach rechts ok!

analog:

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2)$$
$$= -2kx_2 + kx_1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\ddot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} \end{pmatrix}$$

aus Eigenwertgleichung

$$-\omega^2 = -\frac{4k}{2m} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{-\frac{2k}{m} + \frac{2k}{m}}{2}\right)^2}_{0} + \left(\frac{k}{m}\right)^2}$$

$$-\omega^2 = -\frac{2k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems

Für die entsprechenden Normalmoden ergibt sich

$$\underline{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Mode zu } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\underline{c}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Mode zu } \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$\underline{x}(t) = \underline{c}^{(1)} \left(\alpha_+ e^{i\omega_1 t} + \alpha_- e^{-i\omega_1 t} \right) + \underline{c}^{(2)} \left(\beta_+ e^{i\omega_2 t} + \beta_- e^{-i\omega_2 t} \right)$$

mit $\alpha_+, \alpha_-, \beta_+, \beta_-$ aus den Anfangsbedingungen ergeben!

Anfangsbedingungen: $\underline{x}(t=0)$

$\dot{\underline{x}}(t=0)$

physikalische Interpretation der Lösungen für dieses System aus 2 Massenpunkten:

z.B. $\beta_+ = \beta_- = 0 \Rightarrow$ es kommt nur auf $\underline{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ an

„Massen schwingen miteinander mit der Frequenz ω_1"

z.B. $\alpha_+ = \alpha_- = 0 \Rightarrow$ es kommt nur auf $\underline{c}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ an

$\Rightarrow$ Massen schwingen gegeneinander mit der Frequenz ω_2

III. Partielle Differentialgleichungen und Fourieranalyse

III.1. Allgemeines

Bisher hatten wir DGL's der Form

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

mit $y = y(x)$

$y'(x) = \frac{dy}{dx}$ etc.

„gewöhnliche Differentialgleichung"

Eine partielle DGL hat z.B. die Form

$$F(x, y, z, \underbrace{z_x, z_y, z_z, z_{xy}, z_{xx}, \ldots}) = 0$$

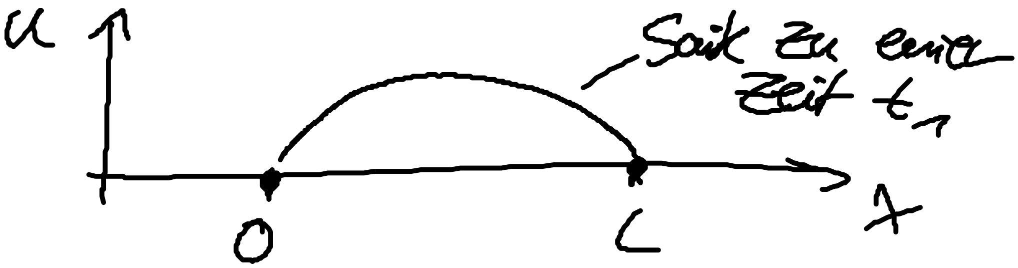
2 Variablen $\quad z = z(x,y) \quad$ Ableitungen von z nach x und y

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

III.2. Schwingende Saite

Sei $u(x,t)$ die Auslenkung einer an beiden Seiten fixierten Saite als Funktion des Ortes x und der Zeit t



Es gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

Schallgeschwindigkeit

Die Gleichung heißt auch „Wellengleichung in 1 Dimension"

(kommt später in der Elektrodynamik bei der Diskussion elektro~~dynamischer~~ magnetischer Wellen)

Zu bestimmen:

$u(x,t)$ für $t>0$

vorgegeben:

Anfangsprofile für Auslenkung und entsprechende Geschwindigkeit

$$u(x, t=0) = u_0(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\Big|_{t=0} = v_0(x)$$

dann noch Randbedingungen:

$$u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0 \qquad \forall t$$

<u>Lösungsansatz</u>:

Idee: Separationsansatz

$$u(x,t) = Y(x)\, Z(t)$$

Einsetzen:

in $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$

$$\Rightarrow Y(x)\, Z''(t) = c^2\, Y''(x)\, Z(t)$$

$$\Rightarrow \frac{Z''(t)}{c^2 Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)}$$

Linke Seite der Gleichung hängt nur von t ab, rechte Seite nur von x

$\Rightarrow$ Beide Seiten müssen gleich einer Konstanten sein!

$$\frac{Z''(t)}{c^2 Z(t)} = \underbrace{-k^2}_{\text{Konstante}} \qquad \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \underbrace{-k_1^2}_{\text{Konstante}}$$

$\Rightarrow$ Man hat also 2 Gleichungen der Form

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ Z''(t) = -k^2c^2 Z(t) \\ 2)\ Y''(x) = -k^2 Y(x) \end{array}\right\} \text{gewöhnliche lineare DGL's 2 Ordnung mit konstanten Koeffizienten!}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösungen können sofort hingeschrieben werden!

$$Y(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)$$

$$Z(t) = \gamma_1 \cos(kcx) + \gamma_2 \sin(kcx)$$

$$u(x,t) = Y(x)\, Z(t)$$