II.2 Schwingende Saite (Fortsetzung)

$$\frac{z''(t)}{c^2 z(t)} = -k^2 \quad \text{und} \quad \frac{y''(x)}{y(x)} = -k^2$$

Jede der Gleichungen ist eine gewöhnliche lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizient!

$\Rightarrow$ eine mögliche Lösung kann sofort hingeschrieben werden

z. B

$$y(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx$$

$$z(t) = \gamma_1 \cos kct + \gamma_2 \sin kct$$

eindimensionale "Wellen".

Betrachten nun die (räumlichen) Randbedingungen

$$u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0 \quad \forall t$$

aus dem Separationsansatz folgt dann

$$y(x=0) = y(x=L) = 0$$

Kombinieren jetzt mit der Lsg für $y(x)$

$$\Rightarrow \quad \alpha \overbrace{\cos(k0)}^{1} + \beta \overbrace{\sin(k0)}^{0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

und $\quad \cancel{\alpha \cos(kL)} + \beta \sin(kL) = 0$

$$\Rightarrow \quad \sin kL = 0$$

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Es kommen also nur diskrete für k vor!

<u>beachte</u>

k entspricht dem Wellenvektor (hier skalar, da Problem in einer Dimension)

$$u_n(x,t) = \beta \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\gamma_1 \cos k_n ct + \gamma_2 \sin k_n ct\right)$$

definiere noch neue Variablen

$$a_n = \beta\gamma_1 \quad , \quad b_n = \beta\gamma_2$$

$$\Rightarrow \quad u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(a_n \cos(k_n ct) + b_n \sin(k_n ct)\right)$$

Wir benutzen jetzt, dass die partielle DGL

<u>linear</u> in $u(x,t)$

$\longrightarrow$ Lineare Kombinationen verschiedener Lsg sind wieder eine Lsg.

hier: Kombiniere Lsg mit verschiedenen Werten von n

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(a_n \cos(k_n ct) + b_n \sin(k_n ct)\right)$$

Bestimme die Koeffizienten a_n, b_n aus den Anfangsbedingungen

i) $u(x, t=0) \overset{!}{=} u_0(x)$

ii) $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\Big|_{t=0} = v_0(x)$

$\Rightarrow$ aus i). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x)$

aus ii) $\sum_{n=1}^{\infty} k_n c\, b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = v_0(x)$

Frage: Wie bestimmt man daraus die Koeffizienten a_n, b_n? ?

Lsg Benutze Orthogonalität der Fkt $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

es gilt nämlich

(ÜB)

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \frac{L}{2}\delta_{nm} \text{ mit } \underbrace{\delta_{nm}}_{\text{Kronecker Symbol}} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$$

Diese Orthogonalitätsrelation kann nun benutzt werden

um i) und ii) nach a_n und b_n aufzulösen?

(aus i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x)$$

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$= \int_0^L dx\, u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{L}{2}\delta_{nm}}_{\frac{L}{2} a_m} = \int_0^L dx\, u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

analog:

$$b_n = \frac{2}{L}\,\frac{1}{k_n c}\int_0^L dx\; v_0(x)\,\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$\Rightarrow$ ~~Endgültige~~ komplette Lsg. der partiellen DGL!

III.3 Mathematischer Einschub: Fourierreihe

Definition: Die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-L, L]$ ist definiert als unendliche Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$

"Entwicklung in stehende Wellen"

mit den reellen Koeffizienten a_n, b_n

beachte: Es gilt wegen Periodizität der sin- und cos-Fkt

$$f(x+2L) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x + \underbrace{\frac{n\pi 2L}{L}}_{n\cdot 2\pi}\Big) + b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x + \underbrace{\frac{n\pi 2L}{L}}_{n\cdot 2\pi}\Big)\Big)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$

$= f(x)$

Eine noch andere Definition der Fourierreihe ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$ wobei die c_n jetzt komplex sind

Beachte: Falls $f(x)$ reell ist, muß gelten

$c_{-n} = c_n^*$, c_0 reell denn dann folgt:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + c_0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + c_0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{c_{-n}}_{c_n^*} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} + c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \Big) + c_0$$

$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}(z)$ ✓

In allen Fällen können die Koeffizienten a_n, b_n, c_n durch Projektion bestimmt werden (Skalarprodukt)

also:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}$$

Dies folgt aus der Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \delta_{nm}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \delta_{nm}$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\, \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = 0$$ auch bei $n=m$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, e^{i(n-m)\frac{\pi}{L}x} = \delta_{nm}$$

Wegen der Orthogonalität nennt man $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, und $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, und $e^{in\frac{\pi}{L}x}$ häufig auch „Basisfunktion" eines orthogonalen Funktionensystems.

Mathematischer Einschub

Die hier eingeführten Fkt $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ und $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, sowie $e^{in\frac{\pi}{L}x}$ bilden einen Vektorraum

i) Entwicklung

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n}_{\text{Koeffizient}}\, \underbrace{e^{in\frac{\pi}{L}x}}_{\text{Basisfkt } e_n(x)}$$

entspricht

$$\underline{y} = \sum_{n=1}^{d} \underbrace{y_n}_{\text{Koeffizient}}\, \underbrace{\hat{\underline{e}}_n}_{\text{Basisvektor}}$$

d-dimensionaler Raum (Annahme: Dieser Vektorraum sei reell)

ii) Koeffizienten in der Entwicklung

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, e^{-in\frac{\pi}{L}x}$$

entspricht

$$y_n = \hat{\underline{e}}_n \cdot \underline{y} = \sum_{n=1}^{d} \hat{e}_{ni}\, y_i$$

$$= \langle \hat{e}_n | y \rangle$$ neue Notation

definiere für die Basisfkt analog das Skalarprodukt

$$\langle e_n | e_m \rangle = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, e_n^*(x)\, e_m(x)$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, e^{i\frac{(m-n)\pi}{L}x}$$

(ii) Basisfunktion sind orthogonal zueinander

$\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm}$ schon gezeigt

(iv) Die Basisfkt spannen den ganzen Raum auf „Vollständigkeitsrelation":

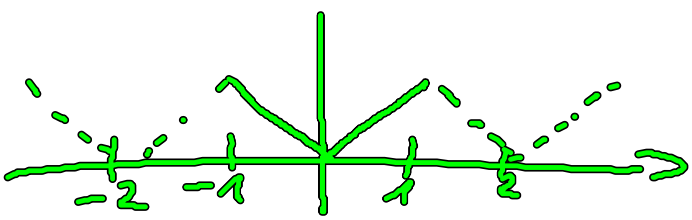
$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, f^*(x) f(x) = \langle f|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

heißt auch „Parsevalsche Gleichung"

Bemerkung: Weitere Beispiele für orthogonale Basisfkt: ebene Wellen, Kugelflächenfkt, Besselfkt

Beispiel

$f(x) = |x|$, $-1 \le x \le 1$, periodisch fortgesetzt in beiden Richtungen.



Periode $2L = 2$ $(\Rightarrow L = 1)$

Entwicklung in komplexe Fourierreihe

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} dx\,(-x) + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} dx\, x = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, f(x)\, e^{-in\pi x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} dx(-x)\,e^{-in\pi x} + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} dx\, x\, e^{-in\pi x}$$

partiell integrieren!

$$= \frac{1}{2}\left[-x\frac{e^{-in\pi x}}{(-in\pi)}\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\frac{1}{(-in\pi)}\int_{-1}^{0} dx(-1)e^{-in\pi x}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[x\frac{e^{in\pi x}}{(-in\pi)}\right]_{0}^{1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(-in\pi)}\int_{0}^{1} dx\, 1\, e^{-in\pi x}$$

$$= +\frac{1}{2}\frac{e^{in\pi}}{in\pi} + \frac{1}{2}\frac{1}{(-in\pi)^2}\left(1-e^{in\pi}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{e^{-in\pi}}{(-in\pi)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(-in\pi)^2}\left(e^{-in\pi}-1\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{in\pi}\underbrace{\left(e^{in\pi}-e^{-in\pi}\right)}_{2i\sin n\pi \,=\, 0}} - \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\underbrace{\left(e^{in\pi}+e^{-in\pi}\right)}_{2\cos n\pi}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}$$

Beachte!

Es gibt auch „halb intervallige“ Fourierreihen (z.B. Zu-Seite ~~benutzt~~ benutzt)

z.B. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

bzw. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

III.4 Diffusionsgleichung in einer Dimension

Physikalische Frage

Wie ändert sich die Konzentration $n(x,t)$ eines Stoffes als Fkt. des Ortes und der Zeit?

(betrachte hier eindimensionalen Fall)

„Herleitung" einer geeigneten Dgl

i) räumliche Änderungen von n führen zu einem Materiestrom $j(x,t)$

Definition $\left\| j(x,t) = -D \frac{\partial}{\partial x} n(x,t) \right\|$ (i)

D: Diffusionskoeffizient (>0)

Interpretation: j mißt die Zahl der Teilchen, die pro Zeit- und Flächeneinheit eine Fläche senkrecht zur x-Richtung durchqueren.

ii) Teilchenzahlerhaltung $\Leftrightarrow$ Kontinuitätsgl.

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x,t) \right\| \quad \text{(ii)}$$

Folgerung $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} n(x,t)\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} dx\, n(x,t) = j(x_1,t) - j(x_2,t)$

d.h. Änderung der totalen Konzentration im Intervall $[x_1, x_2]$ entspricht der Zahl der bei x_1 einfließenden Teilchen minus der Zahl der bei x_2 abfließenden Teilchen.

kombiniere (i) und (ii)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-D \frac{\partial}{\partial x} n(x,t)\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)}$$

Diffusionsgleichung in 1. Dimension

(Fick'sches Gesetz)

mathematisch: Lineare Partielle DGL 2. Ordnung (im Ort)

Lösung:

Verwende wieder Separationsansatz f. Basis

$$n(x,t) = y(x)\, z(t)$$

Einsetzen $\Rightarrow$ $y(x)\, z'(t) = D\, y''(x)\, z(t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{z'(t)}{D\, z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \text{const} = -k^2$$

(wie bei Wellengleichung)

beliebig gewählt werden.

Beide Einzelgleichungen sind wieder lin. Dgl.!

$\Rightarrow$ allgemeine Lsg sind von der Form

$$y(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)$$
$$z(t) = e^{-Dk^2 t}$$

Analog zur Wellengleichung.