Neuer Übungszettel, Aufgabe 27b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\, f(x)\, dx = \underline{\underline{-f'(0)}}$$

Wiederholung

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)$$ ← Konzentration

Diffusionsgleichung

Separationsansatz $n(x,t) = y(x)\, z(t)$

$$\Rightarrow \frac{z'(t)}{D\, z(t)} = -k^2$$

$$\frac{y''(x)}{y(x)} = -k^2$$

genau wie bei Wellengleichung!

Beide Einzelgleichungen sind gewöhnliche lineare homogene DGLs!

⇒ Lösungen sind von der Form

$$y(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx$$

$$z(t) = e^{-Dk^2 t}$$

<u>mögliche Anfangs- und Randbedingungen</u>

$$n(x, t=0) = n_0 = \text{const}$$ räumlich homogene Konzentration

$$n(x=0,t) = 0$$
$$n(x=L,t) = 0$$

L endlich

$\rightarrow$ „Diffusion in einem Stab endlicher Länge"!

$$k = \frac{m\pi}{L}$$

diskrete Werte, $m = 1, 2, 3 \ldots$

Frage: Was passiert für sehr lange Stäbe, also $L \to \infty$?

III.5. Fouriertransformation

Ausgangspunkt: Betrachte komplexe Fourierreihe einer periodischen Funktion $f(x) = f(x+2L)$ auf dem Intervall $[-L, L]$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

Setze Formel für c_n ein!

benutze
$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, f(x) e^{-\frac{in\pi}{L}x}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} d\tilde{x}\, f(\tilde{x}) e^{-\frac{in\pi}{L}\tilde{x}}\right)$$

$$\cdot e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} d\tilde{x}\, f(\tilde{x})\, e^{\frac{in\pi}{L}(x-\tilde{x})}$$

führe ein: $k_n = \frac{n\pi}{L}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n) \quad \text{mit} \quad g(k_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} d\tilde{x}\, f(\tilde{x})\, e^{ik_n(x-\tilde{x})}$$

Abstand zwischen 2 benachbarten
k-Werten:

$$\Delta k = k_{n+1} - k_n$$

$$= \frac{\pi(n+1)}{L} - \frac{\pi n}{L} = \frac{\pi}{L} \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{\Delta k}{\pi}$$

$$\Rightarrow g(k_n) = \frac{\Delta k}{2\pi} \int_{-L}^{L} d\tilde{x}\, f(\tilde{x})\, e^{ik_n(x-\tilde{x})}$$

Was passiert im Limes $L \to \infty$?

$\Rightarrow$ ersetze die Summe für $f(x)$ durch
ein Integral!

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n) \longrightarrow \frac{1}{\Delta k}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k)$$

k ist jetzt kontinuierliche Variable!

k heißt Wellenzahl

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\cancel{\Delta k}}\int_{-\infty}^{\infty} dk \; \underbrace{\frac{\cancel{\Delta k}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\hat{x})\, e^{ik(x-\hat{x})}\, d\hat{x}}_{g(k)}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x}\, f(\hat{x})\, e^{-ik\hat{x}}$$

definiere

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}\, f(\tilde{x})\, e^{-ik\tilde{x}}$$

„Fourier-Transformierte" von $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\, e^{ikx}$$ „Fourier-Rücktransformation"

man sagt auch:
„Fourier-Entwicklung der Funktion $f(x)$"

Bemerkungen

i) Der Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$ taucht bei unserer Definition unsymmetrisch auf (üblich in der Physik!)

Mathematik: häufig andere Vorfaktoren!

ii) Die Funktionen e^{ikx} können wieder als Basisfunktionen eines Vektorraumes aufgefaßt werden!

Frage: Zugehörige Orthogonalitätsrelation?

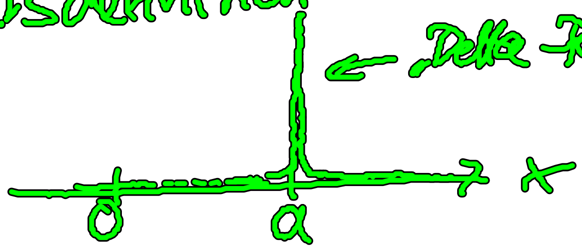
Führe dazu die sogenannte „Delta-Funktion" ein

(Analogon des Kronecker-Deltas für kontinuierliche Funktionen!)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\,\delta(x-a) = f(a)$$

mit $\delta(x-a) = \begin{cases} \infty, & x=a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

„Arbeitsdefinition"



man kann die Delta-Funktion als Grenzwert von Funktionenfolgen definieren → Übung!

alternativ

$$(*) \quad \delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \underbrace{e^{ik(x-x')}}_{e^{ikx}\cdot e^{-ikx'}}$$

$x=x'$: $e^{ik(x-x')}=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk \longrightarrow \infty$

$x\neq x'$: $e^{ik(x-x')} = \cos k(x-x') + i\sin k(x-x')$

oszillierend!

→ Integral verschwindet.

(*) stellt die gesuchte Orthogonalitätsrelation der Basisfunktionen e^{ikx} und $e^{-ikx'}$ dar!

analog:

$$\delta(k-k') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k-k')x}$$

Zeige nun, daß (*) konsistent ist mit unserer Definition der Fouriertransformation!

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}\, e^{-ik\tilde{x}} f(\tilde{x})}_{\hat{f}(k)} e^{ikx}$$

$$= \int d\tilde{x}\, f(\tilde{x}) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-\tilde{x})}}_{\delta(x-\tilde{x})\ !}$$

$$\stackrel{!}{=} f(x)$$

Beispiele für Fouriertransformationen → Übungszettel !

III.6. Anwendung der Fouriertransformation auf Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t) \qquad (*)$$

transformiere (im Ort)

$$n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{n}(k,t)\, e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{n}(k,t)\,(-k^2)\, e^{ikx}$$

einsetzen in (*)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int dk\, \hat{n}(k,t)\, e^{ikx}\right)$$

$$= D\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{n}(k,t)\,(-k^2)\, e^{ikx}\right) \Big| e^{-ikx}$$

muß gelten für alle Wellenzahlen k!

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\hat{n}(k,t) = D\, \hat{n}(k,t)\,(-k^2)} \;!$$

lineare, gewöhnl. DGL 1. Ordnung!

$$\rightarrow \hat{n}(k,t) = \hat{n}_0(k)\, e^{-Dk^2 t}$$

Fouriertransformierte zur Zeit $t=0$!

Rücktransformation:

$$n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \tilde{n}(k,t)\, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \tilde{n}_0(k)\, e^{ikx}\, e^{-Dk^2 t}$$

IV. Kurven und krummlinige Koordinaten

4.1. Bahn eines Körpers im Raum

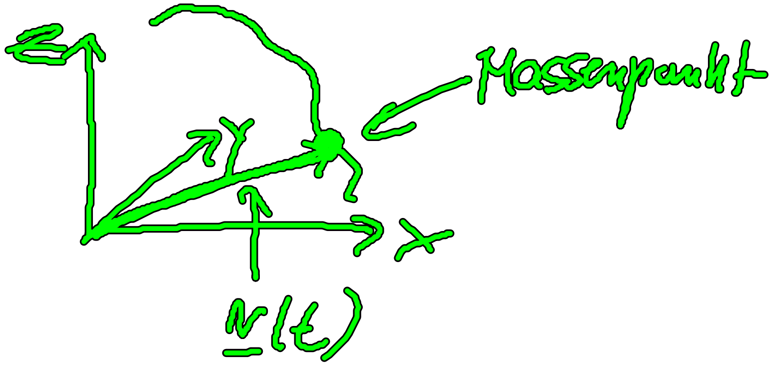
Betracht einen sich bewegenden Massenpunkt

Beschreibung durch „Bahnkurve“ $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Ortsvektor (typischerweise 3-dimensional)

Zeit

Die Bahnkurve ist eine vektorwertige Funktion!



Geschwindigkeit des Körpers

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\\ \dot{z}(t)\end{pmatrix}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$$

wie in einer Dimension!

$$\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t) = \underline{v}(t)\,\Delta t \;!$$

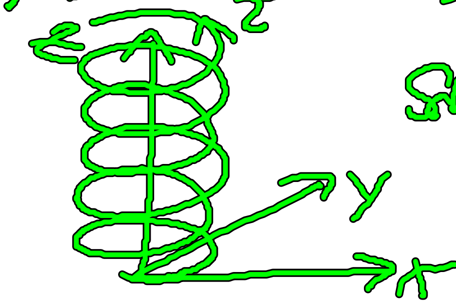
man sieht: Der Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}(t)$ liegt „tangential" zur Bahnkurve!

analog: Beschleunigung

$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t)$$

Beispiel: $\underline{r}(t) = \left(r_0 \sin\frac{t}{\tau}, r_0 \cos\frac{t}{\tau}, v_0 t\right)$

Projektion auf die x-y-Ebene ist ein Kreis!



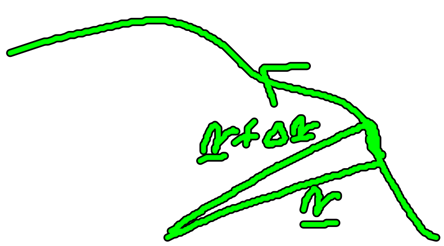
Schraube

$\Rightarrow \underline{v}(t) = \left(\frac{r_0}{\tau} \cos\frac{t}{\tau}, -\frac{r_0}{\tau} \sin\frac{t}{\tau}, v_0\right)$

V.2. Bogenlänge, begleitendes Dreibein

Alternativ zur Zeit t kann man auch andere Parameter zur Charakterisierung der Raumkurve verwenden!

häufig zweckmäßig: „Bogenlänge" s:



$\Delta s \approx \Delta r$

s ist die Länge der Kurve zwischen zwei Punkten!

benutze:

$$\underbrace{\Delta r}_{|\Delta \underline{r}|} = |\underline{v}| \cdot \Delta t \approx \Delta s$$

$\uparrow$ Geschwindigkeit

infinitesimal $\Rightarrow |\underline{v}| = \frac{ds}{dt}$

$\Delta t \to 0$

$$\Rightarrow \quad s = \int_{t_0}^{t} dt' \, |\underline{v}(t')|$$

Länge der Kurve zwischen den Zeiten t_0 und t!

Anfangszeit

Integration der Geschwindigkeit

$\Rightarrow$ neue Beschreibung der Bahnkurve

$$\tilde{\underline{r}}(s) = \underline{r}(t(s))$$

Ableitung

$$\tilde{\underline{t}}(s) = \frac{d}{ds}\tilde{\underline{r}}(s)$$ Definition

$$= \frac{d}{dt}\left(\underline{r}(t(s))\right) \cdot \frac{dt}{ds}$$ Kettenregel!

$$= \underline{v}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}$$

benutze $\frac{ds}{dt} = |\underline{v}| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\underline{v}|}$

$$\rightarrow \quad \hat{\underline{t}}(s) = \underline{v}(t(s)) \cdot \frac{1}{|\underline{v}|}$$

„Tangentialvektor"

$$\left(\text{mit } \frac{1}{|\underline{v}|} = \frac{dt}{ds} \right)$$

$$= \frac{\underline{v}(t(s))}{|\underline{v}|}$$

Einheitsvektor der Geschwindigkeit!