Übungszettel Nr. 9, Aufgabe 25

Korrektur:

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\sin x}{x} = \cancel{\pi} \; \frac{\pi}{2}$$

<u>Wiederholung:</u>

Raumkurven (Bahnkurven) $\underline{r}(t)$

statt Zeit t kann auch die Bogenlänge s verwendet werden

$$s = \int_{t_0}^{t} dt' \, |\underline{v}(t')| \qquad \underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}(t)}{dt}$$

Ableitung der Bahnkurve $\tilde{\underline{r}}(s)$

$$\underline{\tilde{t}}(s) = \frac{d}{ds}\,\tilde{\underline{r}}(s) = \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \overbrace{\frac{dt}{ds}}^{|\underline{v}|^{-1}}$$

$$= \frac{\underline{v}(t(s))}{|\underline{v}|}$$

Der Tangentialvektor entspricht dem Einheitsvektor der Geschwindigkeit!

Im folgenden lassen wir die "Tilde" weg
$\Rightarrow \underline{t}(s)$

Weitere Definitionen

- Normalenvektor $\underline{n}(s)$

$$\underline{n}(s) = \frac{\frac{d\underline{t}(s)}{ds}}{\left|\frac{d\underline{t}(s)}{ds}\right|}$$

beschreibt die Änderung des Tangentialvektors mit der Bogenlänge!

$\underline{n}(s)$ steht senkrecht auf dem Tangentialvektor!

„Beweis"
$$\underline{t}(s) \cdot \underline{t}(s) = 1$$
beide Seiten nach s ableiten

$$\frac{d\underline{t}}{ds} \cdot \underline{t} + \underline{t} \cdot \frac{d\underline{t}}{ds} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,\frac{d\underline{t}}{ds} \cdot \underline{t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n}(s) \cdot \underline{t}(s) = 0$$
q.e.d.

man definiert weiter:

$$\left|\frac{d\underline{t}(s)}{ds}\right| = \kappa$$

„Krümmung" der Kurve!

$\underline{r}(s)$

$$\Rightarrow \underline{n}(s) = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d\underline{t}}{ds}$$

Schließlich:

Die „Binormale" der Kurve ist definiert durch

$$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$$

Vektorprodukt

Bemerkung:
da $|\underline{t}|=1$ und $|\underline{n}|=1$
folgt sofort auch
$|\underline{b}|=1$

$\underline{t}$, $\underline{n}$ und $\underline{b}$ bilden das „Dreibein" eines lokalen Koordinatensystems, das sich entlang der Kurve ändert!

(d.h. die Richtungen von $\underline{t}$, $\underline{n}$ und $\underline{b}$ ändert sich, aber nicht ihre Orthogonalität!")

Ableitung der Binormalen

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = \frac{d}{ds}(\underline{t} \times \underline{n}) \overset{\text{Produktregel}}{=} \frac{d\underline{t}}{ds} \times \underline{n} + \underline{t} \times \frac{d\underline{n}}{ds}$$

$$= \kappa \underbrace{\underline{n}(s) \times \underline{n}(s)}_{0} + \underline{t} \times \frac{d\underline{n}}{ds} = \underline{t} \times \frac{d\underline{n}}{ds}$$

es folgt:

Der Vektor $\frac{d\underline{b}}{ds}$ steht senkrecht auf $\underline{t}$!

andererseits:

$\frac{d\underline{b}}{ds}$ steht auch senkrecht auf $\underline{b}$!

(denn analog zu vorher: $\underline{b} \cdot \underline{b} = 1$

$$2 \frac{d\underline{b}}{ds} \cdot \underline{b} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{b}}{ds} \perp \underline{b} \text{ !})$$

Der einzige Vektor, der senkrecht auf $\underline{b}$ und $\underline{t}$ steht, ist der Normalenvektor $\underline{n}$!

$$\Rightarrow \frac{d\underline{b}}{ds} \sim \underline{n} \quad !$$

man definiert:

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = -\tau \, \underline{n}$$ wobei τ die sogenannte „Torsion" der Raumkurve ist!

Zusammenfassung: „Frenetsche Formeln"

$$\frac{d\underline{t}}{ds} = \kappa \, \underline{n}$$
$$\frac{d\underline{b}}{ds} = -\tau \, \underline{n}$$
$$\frac{d\underline{n}}{ds} = -\kappa \, \underline{t} + \tau \, \underline{b}$$

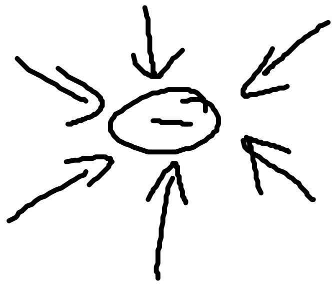
beschreiben die Veränderung des lokalen Dreibeins entlang der Kurve

IV. 3. Krummlinige Koordinaten

Motivation:

Viele physikalische Probleme haben eine bestimmte Symmetrie

$\longrightarrow$ es ist vorteilhaft, symmetrieangepasste Koordinaten zu verwenden!



elektr. Feld einer negativen Punktladung!

„Kugelsymmetrie"

also $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{r} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ u, v, w sind „krummlinige" Koordinaten!

Betrachte den Differenzvektor zwischen
2 benachbarten Punkten

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - \underline{r}(u,v,w)$$

Kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(u+\Delta u, v, w) - \underline{r}(u,v,w)$$
$$+ \underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v, w) - \underline{r}(u+\Delta u, v, w)$$
$$+ \underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - \underline{r}(u+\Delta u, v+\Delta v, w)$$

Für sehr kleine Änderungen $\Delta u, \Delta v, \Delta w$
kann man schreiben:

$$\Delta \underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial \underline{r}}{\partial w} \Delta w$$

partielle Ableitungen!

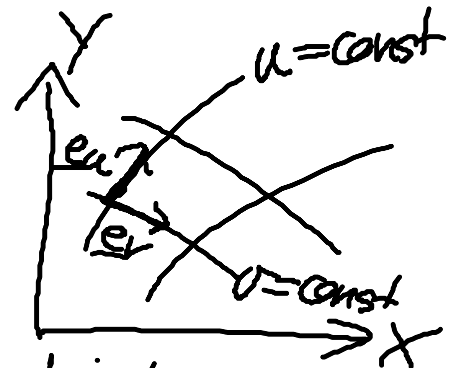
$\Rightarrow$ Tangenten-Einheitsvektoren:

$$\underline{e}_u = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|}, \quad \underline{e}_v = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|}, \quad \underline{e}_w = \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial w}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right|}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Delta \underline{r} = \underline{e}_u \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right| \Delta u \\ + \underline{e}_v \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right| \Delta v \\ + \underline{e}_w \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right| \Delta w\end{aligned}$$

Illustration für 2-dimensionales System:



man sieht:

Die neuen Einheitsvektoren hängen im Unterschied zu kartesischen Einheitsvektoren vom Ort ab!

Betrachte nun das Linienelement

$$\Delta r = |\Delta \underline{r}|$$

Quadrat davon

$$(\Delta r)^2 = \Delta \underline{r} \cdot \Delta \underline{r}$$

$$= \underline{e}_u \cdot \underline{e}_u \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|^2 (\Delta u)^2$$

$$+ \underline{e}_u \cdot \underline{e}_v \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right| \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

$$+ \underline{e}_u \cdot \underline{e}_w \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right| \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right) \Delta u \, \Delta w$$

usw

Zusammengefaßt

$$(\Delta r)^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} \, \Delta u_i \, \Delta u_j$$

mit $u_1 = u$

$u_2 = v$

$u_3 = w$

$$g_{ij} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_j}$$

„Metrik" oder „metrischer Tensor" !

speziell:

Krummlinig- orthogonale Koordinaten

Für diese gilt:

$$\underline{e}_u \cdot \underline{e}_v = 0$$

$$\underline{e}_u \cdot \underline{e}_w = 0 \,, \quad \underline{e}_v \cdot \underline{e}_w = 0$$

$$(\underline{e}_{u_i} \cdot e_{u_j} = \delta_{ij})$$

$$\Rightarrow (\Delta r)^2 = g_{uu}(\Delta u)^2 + g_{vv}(\Delta v)^2 + g_{ww}(\Delta w)^2$$

neue Schreibweise:

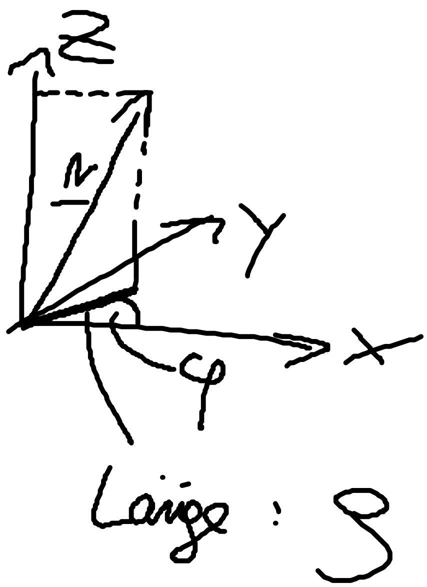
$$g_u = \left|\frac{\partial r}{\partial u}\right| \,, \quad g_v = \left|\frac{\partial r}{\partial v}\right| \,, \quad g_w = \left|\frac{\partial r}{\partial w}\right|$$

$$\Rightarrow (\Delta r)^2 = g_u^2 (\Delta u)^2 + g_v^2 (\Delta v)^2 + g_w^2 (\Delta w)^2$$

Wichtige Beispiele

a) Zylinderkoordinaten

$$\underline{r} = (\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{matrix}$$



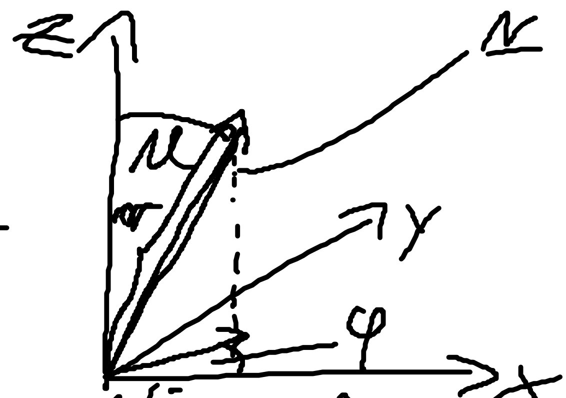
$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$
$$z = z$$

umgekehrt: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

b) Kugelkoordinaten

$$\underline{r} = \underline{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



r ist die Länge von $\underline{r}$

ϑ: Winkel zw. $\underline{r}$ und z-Achse

φ: Winkel zw. Projektion auf die x-y-Ebene und der x-Achse!

V. Vektoranalysis

V.1. Vektorfelder

Ein Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$ ist eine vektorwertige Funktion des Ortes $\underline{r}$

Beispiele:

$\underline{E}(\underline{r})$ elektrisches Feld

$\underline{B}(\underline{r})$ magnetisches Feld

$\underline{v}(\underline{r})$ Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit

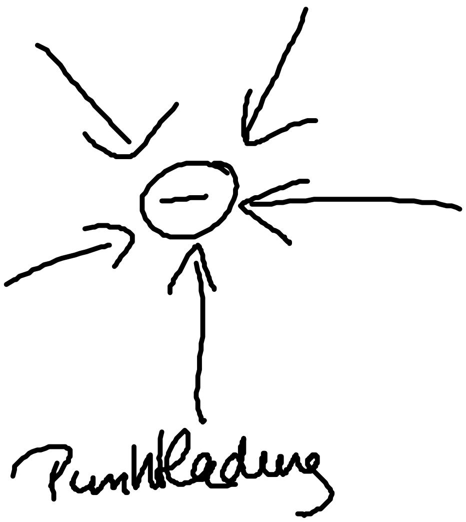
Spezialfall: Skalares Feld $u(\underline{r})$

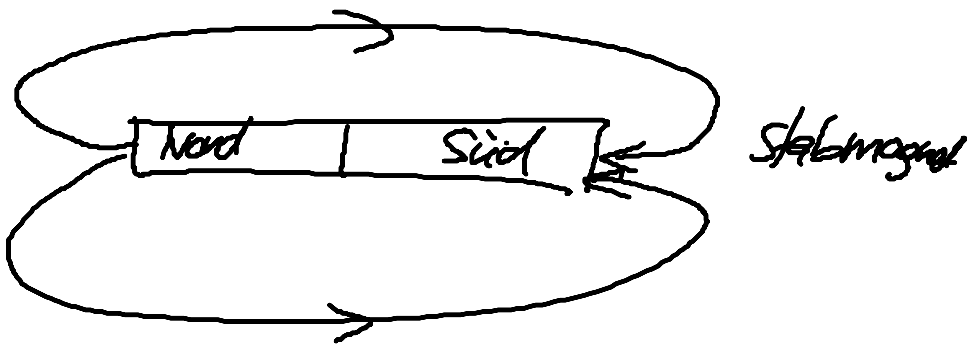
z.B. Dichte $\rho(\underline{r})$, Feldstärke $E(\underline{r}) = |\underline{E}(\underline{r})|$

Darstellung von Vektorfeldern:

„Feldlinien“

→ lokale Richtung des Feldes





V.2. Gradient

gegeben: Skalares Feld $\varphi(\underline{r})$

$\underline{r}$ sei zunächst durch kartesische Koordinaten gegeben!

Wie ändert φ mit $\underline{r}$?

<u>Vorbetrachtung</u>

$$\Delta\varphi = \varphi(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \varphi(\underline{r})$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z$$

Die Feldänderung in einer beliebigen Richtung setzt sich additiv zusammen aus den Änderungen in den 3 Raumrichtungen!

Richtungsableitung

$D_{\underline{v}} \varphi$ Änderung entlang eines beliebigen Einheitsvektors $\underline{v}$

$$:= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(\underline{r} + t\underline{v}) - \varphi(\underline{r})}{t}$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \varphi(\underline{r} + t\underline{v}) \right)_{t=0}$$

Kettenregel

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{d}{dt} (x_i + t v_i) \Big|_{t=0} \qquad \begin{pmatrix} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot v_i$$

(v_i sind die Komponenten des Einheitsvektors $\underline{v}$!)

Definition des Gradienten:

$$\nabla \varphi(\underline{r}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \underline{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \underline{e}_z$$

Nabla-Operator

Zusammenhang mit Richtungsableitung:

$$D_v \, \varphi(\underline{r}) = \nabla \varphi(\underline{r}) \cdot \underline{v}$$

Wichtig:
Der Gradient ordnet einem skalaren Feld einen Vektor zu!

Gradient in krummlinigen Koordinaten

Komponente des Gradienten $\nabla \varphi$ in Richtung u

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$(\nabla \varphi)_u = \underline{e}_u \cdot \nabla \varphi$$

$$= \frac{\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right|} \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{g_u} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \nabla \varphi$$

∂u !

$$= \frac{1}{g_u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$\Rightarrow (\nabla\varphi)_u = \frac{1}{g_u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad !$$

Das heißt

$$\nabla\varphi = \left(\frac{1}{g_u}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{1}{g_v}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{1}{g_w}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)$$