V.3. Gradient und konservative Kräfte

Newton: $m\ddot{\underline{r}} = m\underline{a} = \underline{F}(\underline{r}(t))$

(hatten wir bereits für 1-dim Fall
Kap. IV.3. → harmon. Oszillator)

jetzt: $\underline{F}$ ist ein Vektorfeld !!

Definition:

Eine Kraft heißt konservativ, falls sie sich als Gradient eines skalaren Potentials berechnen läßt,

genauer: $$\underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\,\varphi(\underline{r})$$

Beispiele:

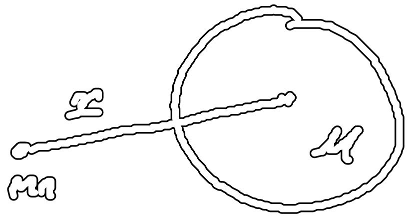
i) Federkraft (→ harmonische Schwingung)

$\underline{F} = -k(\underline{r}-\underline{r}_0) \Rightarrow \varphi(\underline{r}) = \frac{k}{2}(\underline{r}-\underline{r}_0)^2$

z.B. Atome schwingen um ihre Gitterplätze

ii) Gravitationskraft

$\underline{F} = -G\,m\,M\,\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$; $G \approx 6{,}673\cdot 10^{-11}\,\underline{m^3}$



Kraft zwischen einer Masse m und einer Masse M

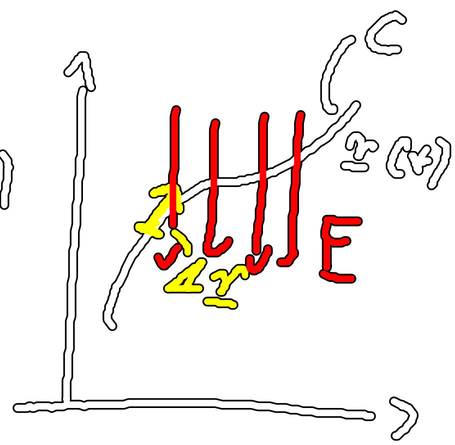
$$\Phi(x) = -G\, m\, M \, \frac{1}{r}$$

Ein weiterer Begriff ist die Arbeit:

Bewegt sich eine Masse entlang einer Kurve $\underline{r}(t)$ im Feld der Kraft $\underline{F}$, so wird **Arbeit** an der Masse verrichtet.

Arbeit bei Bewegung entlang eines kleinen Stücks $\Delta \underline{r}$

$$\delta W = \Delta \underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})$$



„Arbeit = Kraft × Weg“

$\Rightarrow$ Gesamte Arbeit entlang einer Kurve C

$$\sum \Delta \underline{r} \cdot \underline{F} \longrightarrow \boxed{W = \int_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}}$$

Beachte: mathematisch kann hier das Kurvenintegral durch die Parametrisierung auf ein gewöhnliches Integral zurückgeführt werden!

$$W = \int_C \underline{F} \cdot \underbrace{\underline{v}\, dt}_{d\underline{r}}$$

Bemerkung:

manchmal betrachtet man statt der am Teilchen verrichteten Arbeit auch die vom Teilchen verrichtete Arbeit.

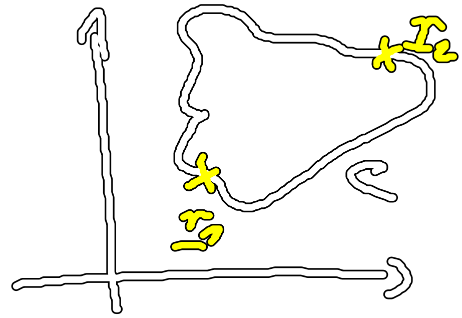
$$\tilde{W} = - \int_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$

also aufpassen!

Schließlich:

Arbeit entlang einer geschlossenen Kurve

$$W = \oint_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$



Betrachte speziell konservatives Kraftfeld:

$$W = \int_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = -\int_C \underline{\nabla} \varphi(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$

$$= -(\varphi(\underline{r}_2) - \varphi(\underline{r}_1))$$

<u>Das heißt:</u>

Für konservative Kräfte hängt die Arbeit <u>nur</u> von der Differenz d. Potentials am Anfangs- und am Endpunkt ab, ist aber unabhängig vom Weg.

* kann geschrieben werden als:

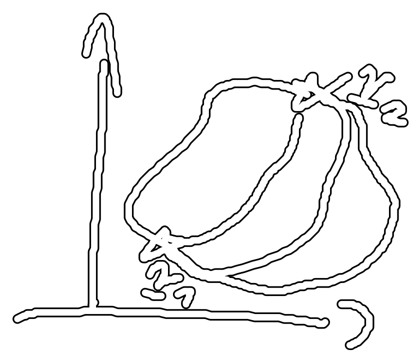
$$W = -\int_C \nabla\varphi \cdot d\underline{r} = -\int_{t_1}^{t_2} \nabla\varphi \cdot \underline{v}\, dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \nabla\varphi \cdot \dot{\underline{r}}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\varphi(\underline{r}(t))}{\cancel{dt}}\, \cancel{dt}$$

$$= -\left(\varphi(\underline{r}(t_2)) - \varphi(\underline{r}(t_1))\right)$$

Speziell: geschlossene Kurve

$$W = -\oint_C \nabla\varphi \cdot d\underline{r} \overset{!}{=} 0$$



Für konservative Kräfte verschwindet das Integral (d.h. die Arbeit) über eine geschlossene Kurve!

(Dies wäre eine alternative Def. der konservativen Kraft)

V.4. Die Divergenz

geg: $\underline{A}(\underline{r})$ (Vektorfeld)

<u>Def. der Divergenz in kartesischen Koor.:</u>

$$\operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{A}(\underline{r})$$

$$= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x(\underline{r}) \\ A_y(\underline{r}) \\ A_z(\underline{r}) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} A_x(\underline{r}) + \frac{\partial}{\partial y} A_y(\underline{r}) + \frac{\partial}{\partial z} A_z(\underline{r})$$

<u>Einige Rechenregeln</u>:

$\operatorname{div} \underline{A} = 0$ falls $\underline{A} = \text{const}$

$\operatorname{div} \underline{r} = 3$

$$\operatorname{div}\left(\varphi(\underline{r})\,\underline{A}(\underline{r})\right) = \underline{\nabla}\cdot\left(\varphi(\underline{r})\,\underline{A}(\underline{r})\right)$$
$$= \left(\underline{\nabla}\,\varphi(\underline{r})\right)\cdot\underline{A}(\underline{r}) + \varphi(\underline{r})\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}(\underline{r})\right)$$

$$\operatorname{div}\left(\underline{\nabla}\varphi\right) = \underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla}\varphi\right) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi$$
$$= \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}_{\Delta}\varphi$$

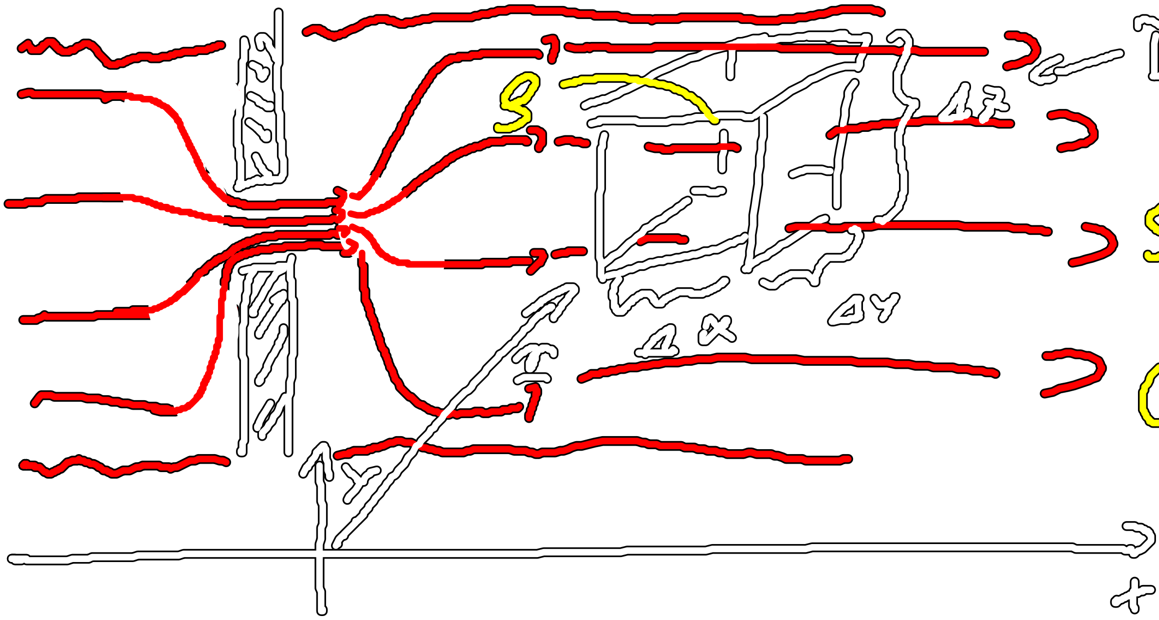
$\underline{\Delta}$: „Laplace-Operator"

Interpretation der Divergenz

Bsp: Strömung einer Flüssigkeit

def. „Stromdichte"

$$\boxed{\underline{j}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})\,\underline{v}(\underline{r})}$$



ϱ(r, t) Dichte im Volume (lokal!)

Frage: Wie ändert sich die Dichte $\varrho(\underline{r},t)$ in ΔV mit der Zeit? (Was ist $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$)

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta N}{\Delta V \Delta t} = \frac{\Delta \varrho}{\Delta t} = \frac{j_x(x,y,z) - j_x(x+\Delta x, y, z)}{\Delta x}$$

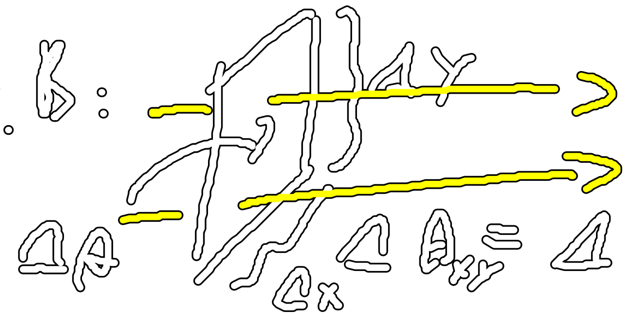
$$+ \frac{j_y(x,y,z) - j_y(x, y+\Delta y, z)}{\Delta y}$$

$$+ \frac{j_z(x,y,z) - j_z(x, y, z+\Delta z)}{\Delta z}$$

lim $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0, \Delta t \to 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t}(\underline{r},t) = -\underline{\nabla} \cdot \underline{j}(\underline{r})$$

2.b:



Skizze hilft!

$\Delta A_{xy} = \Delta x \Delta y$

$$\frac{1}{\Delta t}\Delta N = j_{an} \cdot \Delta A_{xy}$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t \Delta V} = j_{an}\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{j_{an}}{\Delta z}$$

Beachte: Solange … s überhaupt mit t ändert, spricht man von einer nicht-st… Strömung.