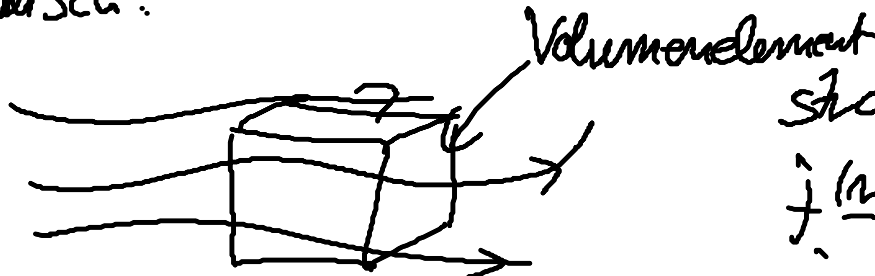
Wiederholung:

$$\mathrm{div}\,\underline{A}(\underline{r}) = \nabla\cdot\underline{A}(\underline{r}), \quad \nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\underline{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\underline{r})}{\partial z}$$

physikalisch:



strömende Flüssigkeit

$j(\underline{r})$ Stromdichte

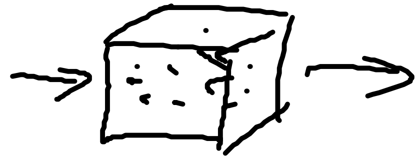
$j = \rho \underline{v}$

$$\frac{\partial \rho(\underline{r},t)}{\partial t} = -\nabla\cdot j(\underline{r})$$

zeitl. Veränderung der Teilchendichte im Volumenelement

Interpretation:

Die Teilchendichte im Volumenelement kann sich zeitlich nur ändern durch Zu- oder Abstrom von Teilchen durch die Außenfläche des Volumens!



„Teilchenzahl-Erhaltung"

Diese Art von Gleichung nennt man Kontinuitätsgleichung

Ganz ähnliche Gleichungen findet man auch in anderen Gebieten der Physik, z.B. Elektrodynamik

ρ: Ladungsdichte
j: elektr. Strom

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla j$$

„Ladungserhaltung"

Betrachte nochmal die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot j(\underline{r})$$

Folgerung:

$$\nabla \cdot j(\underline{r}) > 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$$

es fließt mehr aus dem Volumenelement heraus als hinein

„j hat eine Quelle"

analog

$$\nabla \cdot j < 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$$

: „j hat eine Senke"

$\Rightarrow$ Die Divergenz heißt auch „lokale Quellstärke"

V.5. Rotation eines Vektorfeldes

Gegeben sei wieder ein Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$

Definition der Rotation:

$$\mathrm{rot}\,\underline{A} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$$

$$= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x(\underline{r}) \\ A_y(\underline{r}) \\ A_z(\underline{r}) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\underline{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\underline{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\underline{e_z}$$

Das ist wieder ein Vektor!

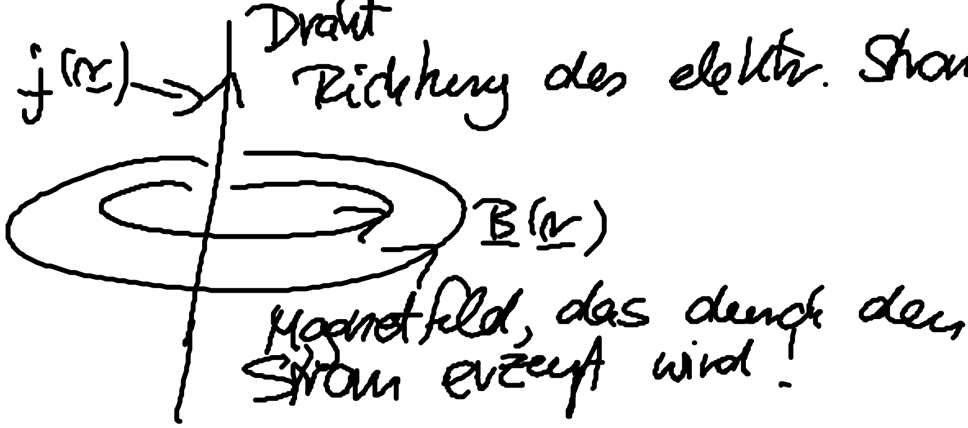
„Anschauliche" Interpretation

„rot $\underline{A}$ mißt die lokale Wirbelstärke

sie ist
z.B. ungleich Null in Geschwindigkeitsfeldern
mit Wirbeln

anderes Beispiel

betrachte stromdurchflossenen Leiter



$\underline{j}(\underline{r})$ (Stromdichte)

es gilt:

$\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r})$

(Magnetostatik)

Wichtige Rechenregeln, die die drei Differentialoperationen Gradient, Divergenz und Rotation verknüpfen

i) $$\nabla \times \underbrace{(\nabla \varphi(\underline{r}))}_{\text{Gradient}} = 0$$ mit φ skalares Feld

betrachte z.B. die x-Komponente

$$(\nabla \times \nabla\varphi)_x = \frac{\partial}{\partial y}(\nabla\varphi)_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla\varphi)_y$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = 0$$

Wichtige physikalische Konsequenz:

- Mechanik:

Konservative Kräfte sind wirbelfrei!

$\underline{F}$ konservativ $\Longleftrightarrow$ $\underline{F} = -\nabla \phi(\underline{r})$

potentielle Energie

$\Rightarrow \operatorname{rot} \underline{F} = 0$!

- Elektrostatik

(zeitunabhängige elektr. Ladungen und Felder)

$\underline{E} = -\nabla \varphi(\underline{r})$ elektrostatisches Potential

$\Rightarrow \nabla \times \underline{E} = \operatorname{rot} \underline{E} = 0$!

(i)

(ii) $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}(\underline{r})) = 0$

$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \underline{A}) = 0$!

„Wirbelfelder haben keine Quellen oder Senken" physikalisches Beispiel: Magnetfelder

$$\underline{B}(\underline{r}) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$$

Vektorpotential

Diese Darstellung von $\underline{B}$ gilt für zeitabhängige und statische Phänomene!

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}) = 0}$$

!

Magnetfelder haben also nie Quellen oder Senken!
→ Es gibt keine magnet. Ladungen!

V.6. Integralsätze

Motivation:

Betrachte nochmal konservative Kräfte in der Mechanik:

$$\underline{F} = -\nabla \Phi(\underline{r})$$

$$\nabla \times \underline{F} = 0 \qquad (\text{Kap } V.5)$$

$$W = \oint_C \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = 0$$

Arbeit (Kap IV.3)

Kurvenintegral entlang einer geschlossenen Kurve C!

! Für konservative Kräfte ist die Arbeit unabhängig vom Weg!

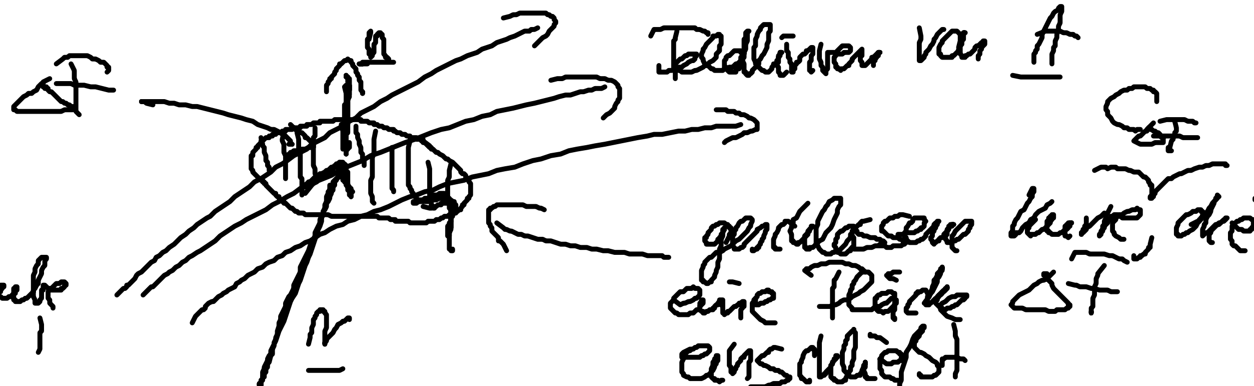
Es gibt also einen Zusammenhang zwischen Kurvenintegralen und der Rotation!

Konkret:

$$\left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r})\right)\cdot \underline{n} = \lim_{\Delta F \to 0} \oint_{C_{\Delta F}} \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{r} \qquad (*)$$

Normalenvektor (Einheitsvektor)

Beachte: $C_{\Delta F}$ bildet Rechtsschraube um $\underline{n}$!



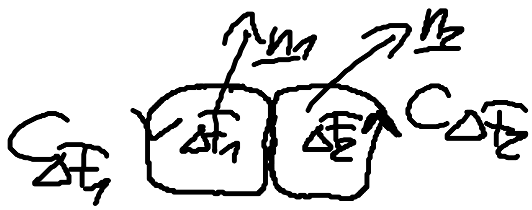
Folgerung aus $(*)$ für sehr kleine ΔF

$$\oint_{C_{\Delta F}} \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = \Delta F\, \underline{n}\cdot\left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r})\right)$$

(unter Vernachlässigung des Rests!)

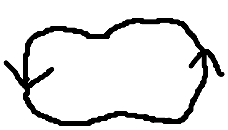
Addiere nun zu ΔF eine kleine benachbarte

Fläche



$$\Rightarrow \oint_{C_{\Delta F_1}} \underline{A}\cdot d\underline{r} + \oint_{C_{\Delta F_2}} \underline{A}\cdot d\underline{r} = \Delta F_1\, \underline{n}_1 \cdot \left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}_1)\right) + \Delta F_2\, \underline{n}_2 \cdot \left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}_2)\right)$$

Beiträge aus dem gemeinsamen Kurvenstück heben sich aufgrund des entgegengesetzten Umlaufsinns heraus!



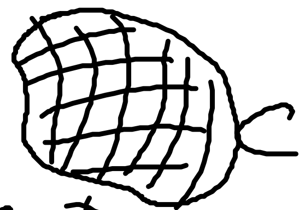
$$\Longrightarrow \oint_{C_{\Delta F_1 + \Delta F_2}} \underline{A}\cdot d\underline{r} = \Delta F_1\, \underline{n}_1 \cdot \left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}_1)\right) + \Delta F_2\, \underline{n}_2 \cdot \left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}_2)\right)$$

mache das vielfach

$$\Rightarrow \oint_{C} \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = \sum_{i=1}^{K} \Delta F_i\, \underline{n}_i \cdot \left(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}_i)\right) \qquad (**)$$

C ← Randkurve, die alle Flächenstücke einschließt!

Lasse nun in (**) die Summe (d.h. K) sehr groß werden (und ΔF_i sehr klein!)



$\Longrightarrow$ Übergang zu einem sogenannten Flächenintegral.

$$\oint_C \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = \int_{F_C} (\nabla \times \underline{A})\cdot d\underline{F}$$

mit $d\underline{F} = \underline{n}\, dF$

$\uparrow$ Normalenvektor

„Stoke'scher Integralsatz"

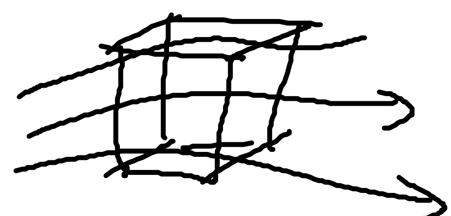
Der Stoke'sche Integralsatz verknüpft also das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes mit dem Kurvenintegral über das Feld an sich!

Der Normalenvektor $\underline{n}$ ändert i.a. seine Richtung, je nachdem, wo man auf der Fläche ist

Betrachte nun einen weiteren Integralsatz, der die Divergenz enthält!

Erinnerung (Kap $\underline{\text{V}}$.4)

$$\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$



Divergenz ist mit dem sogenannten „Fluß" durch ~~der~~ die Oberflächen eines Volumenelements verknüpft

allgemein definiert man

$$\Phi = \int_F \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{F}$$

Fluß des Vektorfeldes $\underline{A}$ durch die Fläche F

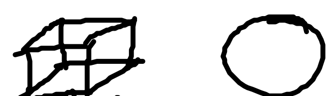
$$d\underline{F} = \underline{n} \cdot dF$$

Definition der Divergenz über Integral.

$$\nabla \cdot \underline{A} = \operatorname{div} \underline{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \underline{A} \cdot d\underline{F}$$

(*)

Integral über geschlossene Oberfläche $F_{\Delta V}$



Oberfläche eines Kubus

Kugeloberfläche

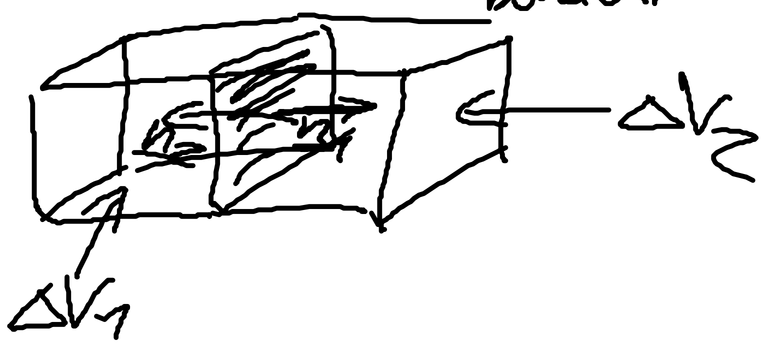
$d\underline{F} = \underline{n}\, dF$

aus (*) → folgt für sehr kleine ΔV

$$\oint_{F_{\Delta V}} \underline{A}\cdot d\underline{F} = \Delta V \,\mathrm{div}\,\underline{A} \quad (**)$$

Addiere (analog zur Vorgehensweise bei der Rotation!)

die Beiträge $\underbrace{\text{vieler geschlossener}}_{\text{benachbarter}}$ Fläche!



Beiträge der Grenzflächen heben sich heraus aufgrund der entgegengesetzten Normalenvektoren!

$\Rightarrow$ aus $(**)$

$$\oint_{F_V} \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{F} = \sum_{i=1}^{K} \Delta V_i \,\mathrm{div}\, A(\underline{r}_i)$$

geschlossener Oberfläche über das gesamte Volumen

$$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_K$$

$k \to \infty$, $\Delta V \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{F_V} \underline{A}(\underline{r}) \cdot dF = \int dV \, \mathrm{div}\, \underline{A}} \quad !$$

Das ist sogenannte
„Gauß'sche Integralsatz“:

Er verknüpft das ~~Vol~~ Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes mit einem Oberflächenintegral über das Feld an sich!

Korrektur:

$$\oint_{F_V} \underline{A}(\underline{r}) \cdot \overset{\underline{n} \cdot dF}{\overset{/\!/}{d\underline{F}}} = \int_V dV \, \mathrm{div}\, \underline{A}$$