V.7. Praktische Auswertung von mehrdimensionalen Integralen

V.7.1. Flächenintegrale

z.B. $\Psi = \int_F \underline{A}(\underline{r}) \cdot \underline{dF}$

Flächenelement (vektoriell!)

$\underline{dF} = \underline{n}\, dF$

speziell: geschlossene Oberfläche:

$$\Psi = \oint_O \underline{A}(\underline{r}) \cdot \underline{dF}$$

O = Oberfläche eines geschlossenen Volumens

Auswertung?

Benutze zunächst kartesische Koordinaten!

Benötige

a) Darstellung des Feldes $\underline{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

$A_x(x,y,z)$, $A_y(x,y,z)$, $A_z(x,y,z)$

b) mathematische Beschreibung der Fläche

Auf einer Fläche reichen 2 Parameter aus, um jeden Punkt auf der Fläche darzustellen!

→ Nehme als Parameter (x, y)

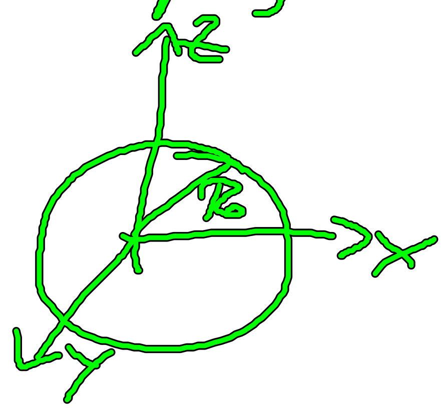
→ Jeder Punkt auf der Fläche wird beschrieben durch

$$\underline{r} = (x, y, z(x,y))$$

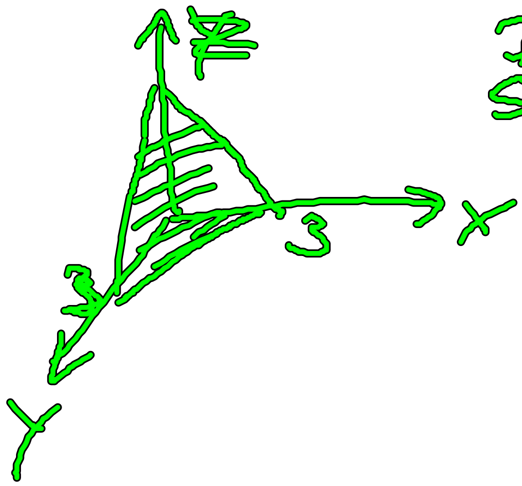
z.B. Kugeloberfläche: (Kugel mit Radius R_0, Mittelpunkt sei im Koordinatenursprung)

→ $x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2$

$\Rightarrow z^2 = R_0^2 - x^2 - y^2$



anderes Beispiel:



Fläche ist das Stück einer Ebene im 1. Quadranten

$\underline{r} = (x, y, z(x,y))$

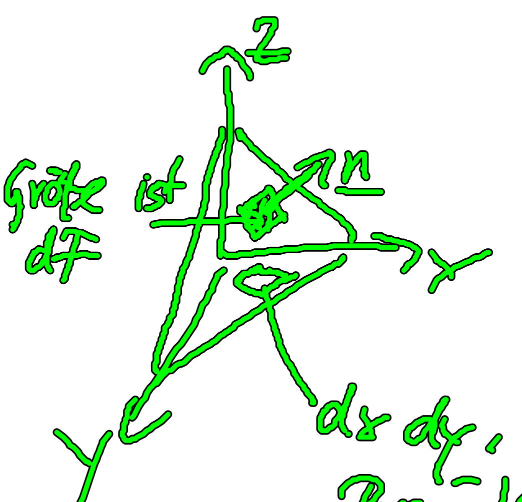
$z = 6 - 2x - 2y$

man sieht: $z = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 2y = 6$

$x + y = 3$

c) Bestimmung des $\underbrace{\text{}}^{\text{vektoriellen}}$ Flächenelements $\quad d\underline{F} = \underline{n} \cdot dF$



Zusammenhang mit dem Flächenstück dx dy in der x-y-Ebene?

Projektion des Flächenstückes dF auf die x-y-Ebene es gilt:

$$|d\underline{F}\cdot\hat{\underline{e}}_z| = |dF\,\underline{n}\,\hat{\underline{e}}_z| \overset{!}{=} dx\,dy$$

$\hat{\underline{e}}_z$: Einheitsvektor in z-Richtung

$$\Leftrightarrow \quad dF = \frac{dx\,dy}{|\underline{n}\cdot\hat{\underline{e}}_z|}$$

Der Vektor $\hat{\underline{e}}_z$ taucht hier auf, da es von der Neigung von $\underline{n}$ bzgl. der z-Achse abhängt, wie groß dF verglichen mit $dx\,dy$ wirklich ist!

Insgesamt:

$$\Phi = \int \underline{A}(\underline{r})\cdot d\underline{F}$$

$$= \iint \frac{\underline{A}(x,y,z(x,y))\cdot\underline{n}(x,y,z(x,y))}{|\underline{n}\cdot\hat{\underline{e}}_z|}\,dx\,dy$$

Bemerkungen

i) Bestimmung von $\underline{n}$:

Annahme: Fläche wird beschrieben

durch $\alpha(x,y,z) = \text{const}$

z.B. $\alpha = x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2$

$\alpha = 2x + 2y + z = 6$

dann gilt: $\underline{n} = \frac{\nabla\alpha(x,y,z)}{|\nabla\alpha|}$

ii) Die verbleibende Integrale im Flächenintegral sind Doppelintegrale der Form $\varphi = \iint dx\,dy\, f(x,y)$

sei $x_a \leq x \leq x_b$

$y = y(x)$

$$\varphi = \int_{x_a}^{x_b} dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}$$

Integriere bei festem x über alle möglichen Werte von y!

Beispiel

Vektorfeld: $\underline{A}(\underline{r}) = (4z, 1, 2x)$

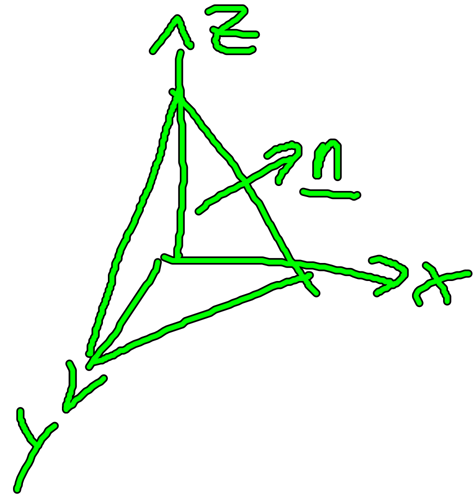
Fläche: $\alpha = 2x + 2y + z = 6 = \text{const}$

Normalenvektor

$$\underline{n} = \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} = \frac{1}{|\nabla \alpha|}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1}}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

außerdem: $\underline{n} \cdot \underline{e}_z = \frac{1}{3}$



$$\Rightarrow \Phi = \int_F \underline{A} \cdot d\underline{F}$$

$$\Phi = \iint \frac{\underline{A} \cdot \underline{n}}{|\underline{n} \cdot \underline{e}_z|}\, dx\, dy$$

$$= \iint \frac{\begin{pmatrix}4(6-2x-2y)\\1\\2x\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \cancel{\frac{1}{3}}}{\cancel{\frac{1}{3}}}\, dx\, dy$$

$$= \iint (50 - 14x - 16y)\, dx\, dy$$

Wir hatten: $\alpha = 2x + 2y + z = 6$ $\Rightarrow$ für $z = 0$ folgt $x + y = 3$

α = const

$$\Phi = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy\, (50 - 14x - 16y)$$

$$= \ldots = \underline{\underline{90}}$$

In vielen Fällen ist es viel geschickter, ein Flächenintegral in anderen (krummlinig-orthogonalen) Koordinaten anzusetzen!

a) Kugelsymmetrie

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

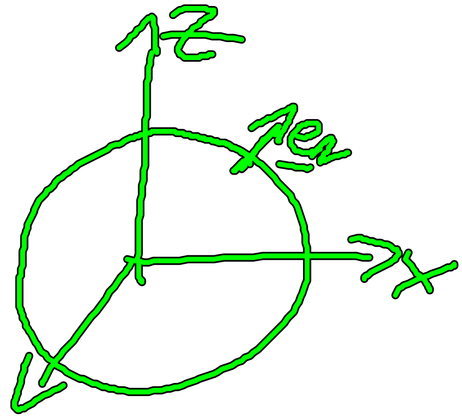
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos\vartheta = \frac{z}{r}$$

Beschreibung einer Kugeloberfläche: (Kugel des Radius R_0)

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} R_0 \sin\vartheta \cos\varphi \\ R_0 \sin\vartheta \sin\varphi \\ R_0 \cos\vartheta \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ relevante Koordinaten sind ϑ und φ

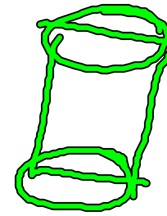
Normalenvektor:

$$\underline{n} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{radialer Einheitsvektor}}}{\underline{\hat{e}}_r} = \frac{\underline{r}}{r} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$



b) Zylindersymmetrie

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit } \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$



Frage: Wie erfolgt die Variablen-Transformation im Integral?

$$\iint \ldots \, dx\, dy \longrightarrow \iint \ldots \, du\, dv$$

krummlinige Koordinaten

Es gilt:

$$\boxed{\iint f(x,y)\, dx\, dy = \iint f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv} \; !$$

z.B. $u = \rho$, $v = \varphi$ (Kugelsymmetrie!)

Dabei ist $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ die sogenannte

Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Die Determinante muß ungleich Null sein damit die Transformation erlaubt ist.

Spezialfälle

a) $(x,y) \to (\vartheta, \varphi)$ Kugeloberfläche

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\vartheta,\varphi)} = \ldots\ldots = R_0^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

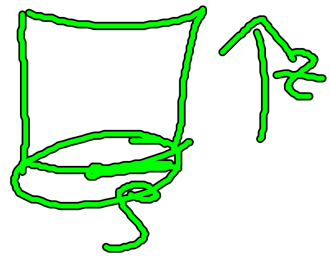
$x = R_0 \sin\vartheta \cos\varphi$

$y = R_0 \sin\vartheta \sin\varphi$

$$\iint \ldots dx\,dy = \iint \ldots \underbrace{R_0^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{dF}$$

b) Zylinder:

$$(x, y) \longrightarrow (\rho, \varphi)$$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \rho$$

Gesamtes Flächenintegral mit krummlinigen Koordinaten:

(Annahme: F sei geschlossene Kugeloberfläche)

$$\Psi = \oint \underline{A} \cdot d\underline{F} = \oint \frac{\underline{A} \cdot \underline{n}}{|\underline{n} \cdot \underline{\hat{e}}_z|} \, dF =$$

$$\Psi = \iint \frac{\underline{A} \cdot \underline{\hat{e}}_r}{|\underline{n} \cdot \underline{\hat{e}}_z|} R_0^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\underline{n} = \underline{\hat{e}}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{n} \cdot \underline{\hat{e}}_z = \cos\vartheta$$

$$\Rightarrow \Psi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\underline{A} \cdot \underline{\hat{e}}_r\right) r_0^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\begin{pmatrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \vartheta \le \pi \end{pmatrix}$$

Achtung:
Ergebnis ist unabhängig
von der Reihenfolge der Integration!

Eine weitere Möglichkeit zur Auswertung von Flächenintegralen ist die Parameterdarstellung:

Seien s und t zwei Parameter, mit denen alle Punkte auf der Fläche beschrieben werden können, also $\underline{r} = \underline{r}(s,t)$

Dann gilt:

$$\Phi = \int \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{F}$$

Vektorprodukt

$$= \int \underline{A}(\underline{r}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} \right) ds\, dt$$

Beachte: die Komponenten von diesem Vektorprodukt sind gerade Funktionaldeterminante

→ Für (s,t) Krümmungs Koordinaten führt das auf dieselben Ergebnisse wie vorher!
(muß ja auch so sein!)

V.7.2. Volumenintegrale

gegeben:

$$I = \int dV \; \varphi(\underline{r})$$

Volumen

(alternative Schreibweisen:

$$\int dV \ldots ; \int d\underline{r} \ldots ; \int d^3 r$$

man kann auch betrachten:

$$\underline{I}' = \int dV\, \underline{A}(\underline{r})$$

hier können getrennt drei Integrationen über die Komponente von $\underline{A}$ durchgeführt werden!

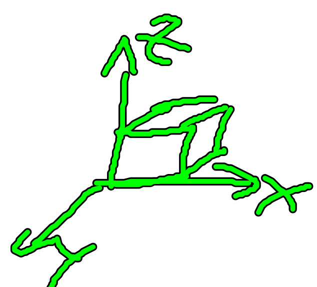
Fokussiere auf $I = \int dV\, \varphi(\underline{r})$

dV hat keinen vektoriellen Charakter!

→ Problem reduziert sich auf die Auswertung von Dreifachintegralen!

a) Kartesische Koordinaten

$$I = \int dx \int dy \int dz\; \varphi(x, y, z)$$



Integrationsgrenzen hängen von der Darstellung des Volumens ab!

b) Auswertung in krummlinigen Koordinaten:

$$I = \iiint \varphi(x,y,z)\, \underbrace{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}}_{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}\, du\, dv\, dw$$

Kugelkoordinaten:

$$I = \iiint \varphi(r,\vartheta,\varphi)\, \underbrace{r^2 \sin\vartheta}_{\text{aus der Funktionaldeterminante}}\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

Zylinderkoordinaten:

$$I = \iiint \varphi(\varrho,\varphi,z)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz$$