(ii) <u>Poisson-Verteilung</u>

$$\boxed{P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}} \quad (3.22)$$

$, x = 0, 1, 2, \ldots$

... Wahrscheinlichkeit für x Einzelereignisse mit $\langle x \rangle = \lambda$

• charakteristische Funktion:

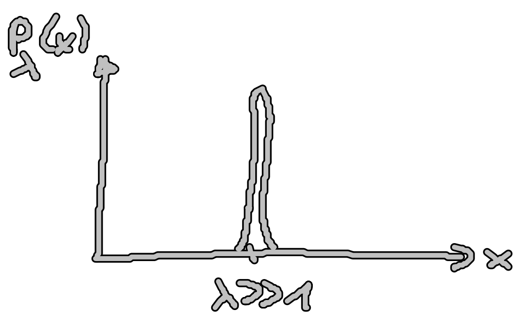
$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \exp[\lambda(e^{-ik} - 1)] \quad (3.23)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} (\lambda e^{-ik})^x e^{-\lambda}$$

$$\longrightarrow \ln G(k) = \lambda(e^{-ik} - 1) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \quad (3.24)$$

$\xrightarrow[\text{mit (3.16)}]{\text{vgl.}}$ $\boxed{\text{Kummulanten } \langle x^n \rangle_c = \lambda}$ (3.25)

insbesondere: $\dfrac{\Delta x}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_c}}{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$



• Herleitung von $P_\lambda(x)$ als Grenzfall der Binomialverteilung (3.21):

$p \to 0$ „seltenes Ereignis"

$N \to \infty$

so daß $\langle N_1 \rangle = Np = \lambda =$ konst.

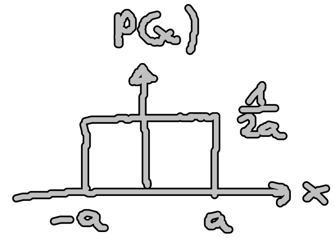
$$\boxed{P_N(N_1) \longrightarrow P_\lambda(N_1) = \frac{\lambda^{N_1} e^{-\lambda}}{N_1!}} \qquad (3.26)$$

Beweis: Übungen!

b) kontinuierliche Verteilungen

(i) homogene Verteilung

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & , |x| < a \\ 0 & , |x| > a \end{cases} \qquad (3.27)$$



- Momente:

$$\langle x^n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{a(n+1)} a^{n+1} & , n \text{ gerade} \\ 0 & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bew. Übungen

- charakt. Funktion:

$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \frac{\sin ka}{ka} \quad , \quad G(0) = 1 \ \dots \text{ Normierung!}$$

Bew: Übungen

- Kumulanten?

(ii) Normal-/Gaußsche Verteilung

s.o.

(iii) Exponentielle Verteilung

$$P(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \qquad (3.28)$$

Momente, charakt. Funktion, Kumulante (s. Übungen)

3.4 Mehrdimensionale Verteilungen

- stochastische Variablen: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$P(\underline{x})\, d^n x$ ... Wahrscheinlichkeit für $[[x_1, x_1+dx_1), \dots, [x_n, x_n+dx_n)]$

• unabhängige stochastische Variable: x, y

$$\boxed{P(x,y)\,dx\,dy = P(x)\,P(y)\,dx\,dy} \quad (3.29)$$

... Multiplikationsregel

• Def: Korrelationsfunktion:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{ij} &= \langle (x_i - \langle x_i\rangle)(x_j - \langle x_j\rangle)\rangle \\ &= \langle x_i x_j\rangle - \langle x_i\rangle\langle x_j\rangle \end{aligned}} \quad (3.30)$$

... Kovarianzmatrix

zeigt an: Korrelationen von Fluktuationen um $\langle x_i\rangle$ und $\langle x_j\rangle$

Bsp: $P(x,y) = P(x)\,P(y)$

$$\longrightarrow C_{xy} = \int dx\,dy\; P(x)\,(x - \langle x\rangle)\; P(y)\,(y - \langle y\rangle)$$
$$= 0\,!$$

• Wahrscheinlichkeitsdichte für $[(x_1, x_1 + dx_1), \ldots, (x_{n-1}, x_{n-1} + dx_{n-1})]$

$$\boxed{P(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int dx_n\; P(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)} \quad (3.31)$$

• Satz:

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x_1 \ldots, x_k \mid x_{k+1} \ldots x_n)$ für $x_1, \ldots, x_k$, wenn $x_{k+1} \ldots x_n$ mit Sicherheit vorliegen

$$P(x_1 \ldots x_k \mid x_{k+1} \ldots x_n) = \frac{P(x_1, \ldots, x_n)}{P(x_{k+1}, \ldots, x_n)} \quad (3.32)$$

wobei $P(x_{k+1}, \ldots, x_n) = \int dx_1 \ldots dx_k\; P(x_1, \ldots, x_n)$

„Beweis": $\int P(x_1, \ldots, x_k \mid x_{k+1} \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_k = 1\,!$ Normierung

stochastisch unabh. Variablen: $P(x|y) = \dfrac{P(x)\,P(y)}{P(y)} = P(x)\,!$

3.5 Zentraler Grenzwertsatz

• zentraler Satz für Stat. Mechanik

• Satz:

Seien $x_1, x_2, \dots, x_N$ voneinander unabhängige Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, also insbesondere ist $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ und $\Delta x_i = \Delta x$.
Dann genügt die Zufallsvariable $y = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ im Grenzfall $N \to \infty$ der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi (\Delta y)^2}} \, e^{-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \qquad (3.33)$$

mit $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$ und $\Delta y^2 = N \, \Delta x^2$.

Insbesondere gilt: $\frac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle \sqrt{N}}$ also

Aussagen über y sind für große N scharf.

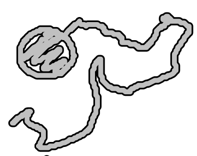
• Bsp: (i) System nicht wechselwirkender Teilchen

x_i = Energie des i-ten Teilchens

y = Gesamtenergie

(ii) Zufallsbewegung („random walk")

insbesondere: Brownsche Bewegung



x_i = Zuwachs beim i-ten (mikroskopischen) Schritt

(z. B. durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle)

y = Position nach N Schritten

• Beweis:

Führe ein: $z(\{x_i\}) = \sum_i \frac{x_i - \langle x \rangle}{\sqrt{N}} = \frac{y - N\langle x \rangle}{\sqrt{N}}$ (3.34)

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$P(z) \overset{(3.8)}{=} \langle \delta(z - z(\{x_i\})) \rangle$$

$$= \int dx_1 \dots dx_N \underbrace{w(x_1) \dots w(x_N)}_{\text{„unabh. Ereignisse“}} \delta\left(z - \frac{x_1 + \dots x_N}{\sqrt{N}} + \sqrt{N}\langle x \rangle\right)$$

$$\left[\delta(\dots) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik\dots}\right] = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \int dx_1 \dots dx_N \, w(x_1) \dots w(x_N) \, e^{-ik\frac{x_1 + \dots x_N}{\sqrt{N}} + ik\sqrt{N}\langle x \rangle}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz + ik\sqrt{N}\langle x \rangle} \underbrace{\left[G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)\right]^N}_{\text{charakt. Fkt. zu } w(x)}$$

mit $G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right) \overset{(3.16)}{=} \exp\left[-i\frac{k}{\sqrt{N}}\underbrace{\langle x \rangle_c}_{\langle x \rangle} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{N}\underbrace{\langle x^2 \rangle_c}_{(\Delta x)^2} + \frac{1}{6}\frac{k^3}{N^{3/2}}\langle x^3 \rangle_c + \dots\right]$

Kumulanten einführen

$$P(z) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz - \frac{1}{2}k^2 \Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{k^3}{\sqrt{N}}\langle x^3 \rangle_c + \dots}$$

mit $N \to \infty$

$G_p(k) = e^{-\frac{1}{2}k^2 \Delta x^2}$ $\Big\}$ $\longrightarrow$ $P(z) \underset{(3.19)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}} e^{-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}}$

... charakteristische Fkt. von $P(z)$

mit $P(z)\,dz = P(y)\,dy$ und $\frac{dz}{dy} \overset{(3.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}$

$$\longrightarrow \quad P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\Delta x)^2}} e^{-\frac{(y - N\langle x \rangle)^2}{2N(\Delta x)^2}} \quad \text{qed}$$

• Bem: (3.33) auch gültig für abhängige x_i unter gewissen Bedingungen

4. Kinetische Theorie der Gase

• Studium der makroskopischen Eigenschaften einer großen Zahl von Teilchen, ausgehend von (klassischen) Bewegungsgl.

• Ziele:
(i) Motivation des zentralen Postulats der Stat. Mechanik
(ii) Diskussion von Irreversibilität anhand der Boltzmann-Gl. und H-Theorem
(iii) Herleitung makroskopischer Bewegungsgl.

4.1 Der Liouvillesche Satz und Implikationen

• System von N wechselwirkenden Teilchen

Mechanik: dessen Mikrozustand eindeutig bestimmt durch

Orte $q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ und

Impulse $p = \{p_1, \dots, p_N\}$

$\{q, p\}$ = Punkt im 6N dimens. Phasenraum Γ

• Dynamik: Hamiltonschen Bewgl.

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad H \dots \text{Hamiltonoperator}} \tag{4.1}$$

Zeitumkehrsymmetrie:

$t \to -t$, $p_i \to -p_i$, $H(q,p) = H(q,-p)$

$\Longrightarrow$ (4.1) ist zeitumkehrinvariant

$\longrightarrow$ zeitumgekehrte Bahnen $q(-t)$ sind auch Lsg. von (4.1)

also: (4.1) beschreiben reversible Vorgänge