4.3.2 Das H-Theorem

$$\boxed{f(q,p,t) \text{ erfüllt Boltzmann-Gleichung} \;\longrightarrow\; \frac{dH}{dt} \leq 0 \quad \text{mit } H(t) = \int d^3q\, d^3p\, f(q,p,t) \ln f(q,p,t)} \tag{4.25}$$

Beweis: ....

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4}\int d^3q_1\, d^3p_1 \ldots d^3p_4 \underbrace{K(p_1,p_2;p_3,p_4)}_{\geq 0} \underbrace{\left[f_1 f_2 - f_3 f_4\right] \ln \frac{f_1 f_2}{f_3 f_4}}_{\geq 0}}$$

$$\longrightarrow \frac{dH}{dt} \leq 0 \;!!!$$

- Bemerkungen:

(i) $-H \sim$ Informationsentropie
$-H \sim$ Boltzmann-Entropie für $f =$ konstant
} H-Theorem ist Bsp. für Entropiezuwachs

(ii) Grund für Irreversibilität:
(1) Annahme des molekularen Chaos
(2) „Vergröberung" der Längen- und Zeitskala
} Verlust an Information über System

4.3.3 Gleichgewichtseigenschaften

(i) Gleichgewichtsverteilungen:

- Gas im Gleichgewicht, falls $\frac{dH}{dt} = 0$

$\xrightarrow{(4.26)}$ $f_1 f_2 = f_3 f_4 \longrightarrow \underbrace{\ln f_1 + \ln f_2}_{\substack{\text{vor} \\ \text{nach}}} = \underbrace{\ln f_3 + \ln f_4}_{\substack{\text{nach} \\ \text{vor}}}$ Stoß

erfüllt durch additive Größen, die bei Stoß erhalten bleiben:

$\longrightarrow$ Stoßinvarianten:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \chi^i = p_i \,, & i = 1,2,3 & \ldots \text{Impuls} \\ \chi^4 = \frac{\underline{p}^2}{2m} & & \ldots \text{kinetische Energie} \\ \chi^5 = 1 & & \ldots \text{Teilchenzahl} \end{array}} \quad (4.27)$$

$$\longrightarrow \ln f = a(q) + \underline{\alpha}(q) \cdot \underline{p} - \beta(q) \frac{\underline{p}^2}{2m}$$

$$\longrightarrow \quad f(q, \underline{p}) = N(q) \exp\left[\underline{\alpha}(q) \cdot \underline{p} - \beta(q) \frac{\underline{p}^2}{2m}\right] \quad (4.28)$$

- Lokales Gleichgewicht:

Normierung: $\int d^3p \; f(q, \underline{p}) = n(q, t)$ ... Teilchendichte

$$n \overset{(4.28)}{=} N(q) \prod_{i=1}^{3} \int dp_i \;\; \exp\left(\alpha_i p_i - \beta \frac{p_i^2}{2m}\right)$$

[keine Einsteinsche Summenkonvention]

$$= N(q) \prod_{i=1}^{3} \int dp_i \exp\left\{-\frac{\beta}{2m}\left(p_i - \frac{m\alpha_i}{\beta}\right)^2 + \frac{m\alpha_i^2}{2\beta}\right\}$$

$$= N(q)\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{m\alpha^2}{2\beta}\right) \qquad (4.29)$$

„Umbenennung" $\longrightarrow$

$$\boxed{f(q,p,t) = n(q,t)\frac{1}{[2\pi m k_B T(q,t)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{(p-m\,u(q,t))^2}{2mk_BT(q,t)}\right]}$$

mit $n(q,t)$ ... Teilchenzahldichte

$k_BT(q,t) = \beta^{-1}$ ... lokale Temperatur (s.u.)

$m\,u(q,t) = \langle p\rangle = \frac{m\alpha}{\beta}$ ... lokaler mittlerer Impuls

... lokale Maxwell-Verteilung

" Gleichgewichtsverteilung

- globales Gleichgewicht: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \wedge \{H_1, f\} = 0$

(für Gas im Volumen V mit U=0) $\longrightarrow \begin{cases} n = \frac{N}{V} = \text{konstant} \\ T \quad = \quad " \end{cases}$

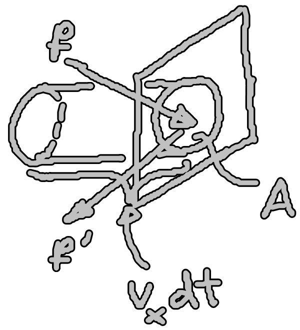
$$\longrightarrow \boxed{f(q,p) = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}}\exp\left(-\frac{p^2}{2mk_BT}\right)} \qquad (4.30)$$

... Maxwellverteilung

Original: $p \longrightarrow m\underline{v}$

(ii) <u>Zustandsgleichung</u>: für Gas mit N Teilchen in Vol. V

- Druck $\hat{=}$ Kraft auf Wand von reflektierten Teilchen



Zahl der Teilchen mit p, die A treffen in dt: $dN(p) = f(p)\,d^3p\,\underbrace{(A v_x dt)}_{\text{Volumen von Teilchen, die in dt die Fläche A treffen}}$

$$\longrightarrow F = \int_{-\infty}^{0} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y\, dp_z\, f(p)\left(A\frac{p_x}{m}\cancel{dt}\right)\frac{2p_x}{\cancel{dt}}$$

$$\rightarrow \quad p = \frac{F}{A} = \int d^3p\, f(p) \frac{p_x^2}{m} \overset{(4.30)}{=} \frac{n}{\beta}$$

$$\xrightarrow{n=\frac{N}{V}} \quad \boxed{pV = N k_B T \quad , \text{ falls } \beta = \frac{1}{k_B T}} \quad (4.31)$$

Identifikation von T über ideale Gasgleichung!

4.4. Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

. Weg ins Gleichgewicht:

(I) auf Zeitskala der Stöße τ_c

$$f_2(\ldots) = f_1(\ldots) f_1(\ldots) \quad \text{für } |q_1 - q_2| \gg \begin{array}{c}\text{Reichweite}\\ \text{Ww-Potentials}\end{array}$$

(ii) in mittlerer stoßfreier Zeit $\tau \gg \tau_c$

Stoßinvarianten gelten $\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ lokales GG

mit $n(q,t)$, $T(q,t)$

lokale Erwartungswerte

$$\langle A(q,p,t)\rangle = \int d^3p \underbrace{f(q,p,t)}_{\substack{\text{lokale Maxwell-}\\ \text{verteilung (4.29)}}} A(q,p,t)$$

bestimmt durch Stoßterm $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}}$ in (4.17)

(iii) Dynamik auf Zeiten $\tau_H \gg \tau$

bestimmt durch Strömungsterm in (4.17)

$\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ globales GG

τ_H bestimmt durch die Zeitentwicklung von Erhaltungsgrößen = hydrodynamische Variable

4.4.1. Erhaltungssätze

- Stoßinvarianten $\longrightarrow$ Erhaltungsgrößen

$\chi^5 = 1 \longrightarrow$ Teilchenzahldichte $\quad n(q,t) = \int d^3p \; 1 \, f = \langle 1 \rangle$

$\chi^i = p_i \longrightarrow$ Impulsdichte $= m \times$ Teilchenstromdichte $j_i(q,t)$

$$j_i(q,t) \equiv n(q,t)\, u_i(q,t) = \int d^3p \, \frac{p_i}{m} f = \left\langle \frac{p_i}{m} \right\rangle$$

$\chi^4 = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow$ Energiedichte

$$n(q,t)\Big[\underbrace{\frac{m\, u^2(q,t)}{2}}_{\substack{\text{kinet. Energie}\\ \text{der lokalen}\\ \text{konvektiven}\\ \text{Strömung}}} + \underbrace{e(q,t)}_{\substack{\text{innere Energie}\\ \text{pro Teilchen}\\ = \text{mittlere kinetische}\\ \text{Energie im lokalen}\\ \text{Ruhesystem}}}\Big] = \int d^3p \, \frac{p^2}{2m} f = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle$$

mit $\quad ne = \frac{m}{2} \int d^3p \left(\frac{p}{m} - u\right)^2 f = \left\langle \frac{m}{2} \Big(\underbrace{\frac{p}{m} - u}_{c}\Big)^2 \right\rangle$

wobei $\langle c \rangle = 0$

(4.32)