- Bilanzgleichungen für Erhaltungsgrößen:

<u>allgemein</u>:

$$\int d^3p \text{ Boltzmann Gl. (4.17)} \times \chi^\alpha$$

mit $\int d^3p \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}} \chi^\alpha = 0$!

[s. Herleitung H-Theorem]

partielle Integr.
Oberflächenterm $= 0$

$$\longrightarrow \int d^3p\, \chi^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\, \mathbf{p} \cdot \nabla_q + \mathbf{F} \cdot \nabla_p\right] f(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = 0$$

$$\longrightarrow \int d^3p \left[\frac{\partial}{\partial t}(\chi^\alpha f) + \frac{1}{m}\, \underline{p}\cdot \underline{\nabla}_q (\chi^\alpha f) - f\, \underline{F}\cdot \underline{\nabla}_p \chi^\alpha \right] = 0$$

(4.33)

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi^\alpha \rangle}_{\text{Dichte}} + \underbrace{\underline{\nabla}_q \cdot \frac{1}{m} \langle \underline{p}\, \chi^\alpha \rangle}_{\text{div (Stromdichte)}} = \underbrace{\underline{F}\cdot \langle \underline{\nabla}_p \chi^\alpha \rangle}_{\text{Quelle / Senke}}}$$

... Bilanzgleichung für Dichte $\langle \chi^\alpha \rangle$

Anwendung auf

(i) Teilchenzahlerhaltung: $\chi^5 = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} n + \underline{\nabla}_q \cdot \underline{j} = 0 \\ &\quad \text{mit } \underline{j} = n\, \underline{u} = \left\langle \frac{\underline{p}}{m} \right\rangle \end{aligned}}$$ (4.34)

... Kontinuitätsgleichung

(ii) <u>Impulserhaltung</u>: $\chi^i = p_i \quad i = 1,2,3$

$$m \frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{1}{m} \nabla_j \underbrace{\langle p_i\, p_j \rangle}_{} = n F_i \qquad \text{mit } \nabla_i = (\nabla_q)_i$$

$$m^2 \langle (\underline{u}+\underline{c})_i (\underline{u}+\underline{c})_j \rangle \underset{\langle c_i \rangle = 0}{=} m^2 n\, u_i u_j + m^2 \langle c_i c_j \rangle$$

$$\longrightarrow m \frac{\partial}{\partial t} j_i + \nabla_j \underbrace{(\underbrace{m n u_i}_{m j_i} u_j - T_{ij})}_{\text{Impulsstromdichte (Tensor 2. Stufe!!)}} = n F_i$$

$m j_i u_j = m n u_i u_j$ .... konvektiver Anteil
= Impulsdichte × Geschw.

$T_{ij} = - m \langle c_i c_j \rangle$ ... Spannungstensor (= − Drucktensor)
(wegen innerer Kräfte)

nF_i ... Volumenkraftdichte äußerer Kräfte

(4.35)

Umschreibung: mit (4.34), o.B.

$$\boxed{\underbrace{mn}_{\text{Massendichte}}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\underbrace{\underline{u}\cdot\underline{\nabla}_q}_{\text{konvektive Ableitung}}\right)}_{\text{totale / materielle Zeitableitung}}u_i=\underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\text{Oberflächenkräfte!}}+nF_i} \quad (4.36)$$

$$\Big[\int d^3q\, \nabla_j T_{ij}=\int \underbrace{T_{ij}\, d^2f_j}_{\text{i-te Komp. der Oberflächenkraft}}!\Big]$$

z.B. Druck-/Reibungskräfte

(4.36) = Newtonsche Grundgleichung

linke Seite: Beschleunigung eines Vol.elementes mit Geschw $\underline{u}$

rechte " : Oberflächen + äußere Kräfte auf Vol.element

(iii) <u>Energieerhaltung</u>: $\chi^5=\frac{p^2}{2m}$

(1) $\frac{1}{m}\langle p_i\chi^5\rangle=\langle (u_i+c_i)\frac{p^2}{2m}\rangle$

$$=u_i\langle\frac{p^2}{2m}\rangle+\frac{m}{2}\langle c_i(u_j+c_j)^2\rangle$$

$$\overset{(4.32)}{\underset{\langle c_i\rangle=0}{=}} n u_i\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2+e\right)+m u_j \underbrace{\langle c_i c_j\rangle}_{-u_j T_{ij}}+\langle c_i \tfrac{m}{2} c_j^2\rangle$$

(2) $\langle \nabla_p \frac{p^2}{2m}\rangle = \langle \frac{p}{m}\rangle = j$

$\xrightarrow[\text{in (4.33)}]{\text{mit (1),(2)}}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[n\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2+e\right)\right]+\nabla_i \underbrace{\left[\underbrace{n u_i\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2+e\right)}_{\text{konvektiver Anteil}}\underbrace{-T_{ij}u_j}_{\text{innere Kräfte}}+\underbrace{q_i}_{\text{Wärmestrom}}\right]}_{\text{Energiestromdichte}} = \underbrace{\underline{j}\cdot\underline{F}}_{\text{Leistung der äußeren Kräfte}}} \quad (4.37)$$

mit $\boxed{q_i = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2\rangle}$ (4.38)

... Wärmestromdichte

Umformung mit Hilfe von (4.34) & (4.36): o.B.

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\right)e}_{\text{zeitliche Änderung der inneren Energie für bewegtes Vol. element}} = \underbrace{-\underline{\nabla}\cdot q}_{\text{Wärmefluß}} + \underbrace{T_{ij}\nabla_i u_j}_{\text{mechan. Leistung der inneren Kräfte}}} \quad (4.38)$$

4.4.2. Hydrodynamische Gleichungen ohne Dissipation

- Materialgesetz für Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ und Wärmestromdichte q

$\equiv$ explizite Berechnung mit $f(q,p,t)$

Annahme: lokales GG

$$f_0(q,p,t)=\frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}}\exp\left[-\frac{(p-m\underline{u})^2}{2m k_B T}\right] \quad (4.29)$$

mit $n, T, \underline{u} = n, T, \underline{u}(q, t)$

Bem: $\left.\frac{\partial f_0}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}} = 0$, aber $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\, p \cdot \underline{\nabla}_q + \underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p\right) f_0 \neq 0!$

- Berechnung der Mittelwerte:

$$\boxed{\langle c_i c_j \rangle_0 \overset{(4.29)}{=} n \frac{k_B T}{m} \delta_{ij}} \qquad c_i = \frac{p_i}{m} - u_i$$

(4.39)

$$\boxed{\begin{gathered} T^0_{ij} = -m \langle c_i c_j \rangle = -P \delta_{ij} \\ \text{mit } P = n k_B T \\ \text{... ideale Gasgleichung} \\ q^0_i = \langle c_i \tfrac{m}{2} c_j^2 \rangle_0 = 0 \\ ne = \frac{m}{2} \langle \underline{c}^2 \rangle_0 = \frac{3}{2} n k_B T \\ \text{... kalorische Zustandsgleichung} \end{gathered}}$$

(4.40)

$\Longrightarrow$ explizite Erhaltungssätze:

$$\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}_q} \quad (4.41)$$

(4.34) $\longrightarrow$

(4.36) $\xrightarrow[-\nabla_i P]{\nabla_j T_{ij} =}$

(4.38) $\xrightarrow{T_{ij} \nabla_j u_i}$ $= -P \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} n = -\underline{\nabla}_q \cdot (n \underline{u}) && (4.42) \\ &m n \frac{d}{dt} \underline{u} = -\underline{\nabla}_q P + n \underline{F}, \quad P = n k_B T && (4.43) \\ &\frac{d}{dt} T = -\frac{2}{3} T\, \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} && (4.44) \end{aligned}}$$

Strom: $q = 0$

- Bemerkungen:
  (1) Gl. (4.42) – (4.44) invariant unter Zeitumkehr
  ($t \to -t$, $\underline{u} \to -\underline{u}$)
  $\longrightarrow$ enthalten <u>keine</u> Dissipation

→ Störungen des GG-Zustandes relaxieren
<u>nicht</u> gegen Null

(2) Verdeutlichung:
(4.42) → $\frac{d}{dt} n = - n \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u}$ in (4.44)

$$\rightarrow \frac{d}{dt} T = \frac{2}{3} T \frac{d}{dt} \ln n \rightarrow \underbrace{\frac{3}{2} \frac{1}{T} \frac{d}{dt} T}_{\frac{d}{dt} \ln T} = \frac{d}{dt} \ln n$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\ln (n T^{-3/2})}_{\sim \text{ lokale Entropie des Gases (0.15) ändert sich nicht}} = 0 \, !$$

(3) (4.43) ≡ Eulersche Gl.
Behandlung von Strömungen kompressibler Gase

• Modenanalyse: