Festkörpertheorie: Methoden der Vielteilchentheorie

Ziel: einheitliche Beschreibung von
Teilchen (Elektron / Ion) und
Wellen (Maxwellfeld) im
Rahmen einer Quantentheorie:

$\Longrightarrow$ Wechselwirkung von Quantenfeldern
Schrödingerfeld (Elektron, Phonon) $\Longleftrightarrow$ Maxwellfeld

1) Feldquantisierung

Ziel: einheitliche Sprache f. Quantentheorie von Maxwell und Schrödingerfeld in der Form d. Lagrange-formalismus

Teilchen – bekannt:

$$L(q, \dot{q}, t) \to p = \partial_{\dot{q}} L \to \text{Quantisierung: } [q, p] \neq 0$$

Lagrangefkt. für Koordinate q — Impuls — Vertauschungsrelation zur Quantisierung.

Wie kann man das für Felder machen?

1.1. Lagrangeformulierung für Felder

allg. Feld $\Upsilon(\vec{r}, t)$: könnte $\vec{E}(r,t)$, $\psi(r,t)$ sein oder $\vec{g}(r,t)$ = Gravitationsfeld (nicht f. ART)

1.1.1. Wirkprinzip f. Felder

Lagrangegleichung für $q, \dot{q}$ aus Wirkungsprinzip f. Teilchen

Teilchen: $S = S(q, \dot{q}, t) \to \delta S = 0$

analog Felder: $S = S(\Upsilon, \partial_t \Upsilon, \partial_j \Upsilon, t)$

$\left.\begin{array}{l} \Upsilon(\vec{r}, t) \\ q(t) \end{array}\right\}$ nehmen an, daß S verallgemeinert wird durch dieses Umschreiben der Wirkung f. Feld

$$q \to \Upsilon$$

$$\dot{q} \to \dot{\Upsilon}$$
$$\cdot \to \frac{\partial}{\partial x_j}\Upsilon$$

um Ort analog de Zeit zu behandeln

$$S_T = \int dt\, L(q, \dot q, t) \xrightarrow{\text{Feld}} S_F = \underbrace{\int dt \int d^3 r}_{\substack{\text{Ort u. Zeit}\\ \text{gleich behandelt}}} \underbrace{\mathcal{L}(\Upsilon, \dot\Upsilon, \Upsilon_{,j}, t)}_{\substack{\text{Lagrange-}\\ \text{dichte } \mathcal{L}}}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Upsilon = \partial_j \Upsilon = \Upsilon_{,j} \right.$ ist komplett identisch in Notation $\left. \right)$

Feldgleichungen im Lagrangeformalismus jetzt aus dem Wirkungsprinzip $\delta S_F = 0$

1.1.2. Lagrange Feldgleichungen

verschiedene Felder

$\delta S_F \overset{!}{=} 0$, Variation um „echte, wahre" Felder $\Upsilon_i^0 + \delta \Upsilon_i$

$$S_F = \int dt \int d^3 r\, \mathcal{L}\left(\Upsilon_i^0 + \delta\Upsilon_i,\ \partial_t \Upsilon_i^0 + \delta \partial_t \Upsilon_i,\ \partial_j \Upsilon_i^0 + \delta \partial_j \Upsilon_i\right)$$

entwickeln der Lagrangedichte nach kleinen Variationen

$$S_F = S_F^0 + \int dt \int d^3r \left(\partial_{Y_i^0} \mathcal{L} \; \delta Y_i + \partial_{Y^0_{i/t}} \mathcal{L} \; \delta Y_{i/t} + \sum_j \partial_{Y_{i/j}} \mathcal{L} \, \delta Y_{i/j} \right)$$

nullter Term nach Taylor

3 kartesisch Ortskoord.

partielle Integration analog. Punktmechanik

$$\underbrace{\delta S}_{\delta S = S_F - S_F^0} = 0 = \int dt \int d^3r \underbrace{\left(\partial_{Y_i^0} \mathcal{L} - \partial_t \partial_{Y_{i/t}} \mathcal{L} - \sum_j \partial_j \partial_{Y_{i/j}} \mathcal{L} \right)}_{\text{Lagrange-Feldgleichg.}} \delta Y_i$$

soll ausgeklammert

wähle δY_i als unabhängig $\longrightarrow$

Lagrange-Feldgleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i/t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{i/j}}$$

(Punktmechanik:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \cdot \quad) \qquad \dot{q}_i = q_{i/t}$$

verallgemeinerte Impuls: $\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{i/t}}$ $\left(p_i = \frac{\partial L}{\partial q_{i/t}} \right)$

1.1.3. Rätselraten um die Lagrangedichte

- wo bekommt man $\mathcal{L}$ her?
- wird so gewählt, daß die Lagrange-Feldgl. die klassisch Feldgleichunge reproduzieren
- zum raten von $\mathcal{L}$ ist es oft dienlich die klassisch Feldenergie aufzuschreiben:

Gravitation:	elektr. Feld	magn. Feld
$E_G = \int d^3r \frac{G}{2} \vec{g}(\vec{r},t) \cdot \vec{g}(r,t)$	$E_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \vec{E}(\vec{r},t) \cdot \vec{E}(r,t)$	$E_M = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \vec{B} \cdot \vec{B}$

unterm Integral stehen Dichten!

Ansatz $\mathcal{L}$ = Energiedichte + „rumbasteln"

damit klass. Gleichg. rauskommen

1.1.4 Freie Felder

frei = kein Feld-Feld-Wechselwirkg.

1.1.4.1. Gravitationsfeld

Ansatz: $S_G = \int dt \int d^3r \; \underline{\frac{G}{2} \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{g}(\vec{r})}$

f. stationäres Gravitationsfeld

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \varphi \qquad \text{Konservativ}$$

φ erfüllt in freiem Raum: $\Delta \varphi = 0$

$$\mathcal{L} = \underline{\vec{\nabla}_r \varphi \cdot \vec{\nabla}_r \varphi \; \frac{G}{2}} = \frac{G}{2} \sum_u \left(\partial_u \varphi \right)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,j}}$$

$$\overset{\shortparallel}{0} = \overset{\shortparallel}{0} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{G}{2} \cdot 2 \sum_u \delta_{ju} \, \partial_u \varphi$$

innen äußer

$$0 = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi = \Delta \varphi$$

→ richtige Lagrangedichte

1.1.4.2. Freies Maxwellfeld

magnetisches, elektrisches Feld ist getrennt bekannt

$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_E \underset{\substack{\uparrow \\ \text{führt zum Erfolg}}}{-} \mathcal{L}_M \quad , \quad \left.\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{aligned}\right\}$$

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\vec{B}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \left(\varepsilon_0 \left\{ (\partial_i \phi)^2 + (\partial_t A_i)^2 + 2\,\partial_t\phi\,\partial_t A_i \right\} - \mu_0^{-1}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_i^2 \right)$$

Ableitung der Feldgl. aus E-Dynamik VL 2008

$$\rightarrow \quad -\varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}$$

Aufgabe 2 wenn ϕ, A_i die Felder sind

1.1.4.3. Freies Schrödingerfeld im Potential U

$\mathcal{L}_S$ raten:

$$\mathcal{L}_S = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right) - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \psi^*_{,i}\, \psi_{,i} \qquad - U\psi^*\psi$$

gibt die Schrödingergleichung für ψ durch Anwenden der Lagrangefeldgleichungen, ψ, ψ^* sind 2 Felder:

rechne die Lagrangegl. für ψ^*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,j}}$$

$$\frac{i\hbar}{2} \partial_t \psi - U\psi = -\frac{i\hbar}{2} \partial_t \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_k \partial_k \sum_i \delta_{ik}\, \psi_{,i}$$

$$i\hbar \partial_t \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U\right) \psi \qquad \text{Aufgabe 2}$$

ergibt die Schrödingergl.! $\mathcal{L}_S$ = okay

1.2. Quantisierung freier Felder

1.2.1 Allgemein Schema f. $\Psi(r, t)$

a) man besorge sich Lagrange dichte $\mathcal{L}(\Psi, \dot{\Psi}, \Psi_{|i}, t)$
soll klass. Gleichg. reproduzieren

b) definiere und berechne den Impuls

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} \qquad \text{Analogie: } p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

c) mache Operatoren aus Ψ, Π

$$\Psi, \Pi \rightarrow \underline{\Psi}, \underline{\Pi} \qquad \text{Analogie: } q \rightarrow \underline{q}, \; p \rightarrow \underline{p}$$

d) fordere Vertauschungsrelationen

$$[\underline{\Psi}_i(\vec{r}, t), \underline{\Pi}_j(\vec{r}', t)] = \delta_{ij} \, i\hbar \, \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

verschieden Felder vertauschen

<u>Analogie</u>: $[\underline{x}_i, \underline{p}_j] = i\hbar \, \delta_{ij}$

es gibt „kleine Abweichg." von dieser Regel
(muß probiert werden)

e) schreibe die Hamilton dichte auf:

$$\mathcal{H} = \sum_i \dot{\Upsilon}_i \Pi_i - \mathcal{L}$$

Analogie:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

f) Bewegungsgleichg. aus der QM:
nach Heisenberg:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\Upsilon} = \frac{i}{\hbar} [\underline{H}, \underline{\Upsilon}] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{\Upsilon}\right)$$

explizite

$$\underline{H} = \int d^3r \, \mathcal{H}$$

g) nach Modeentwicklg:

$\underline{\Upsilon}(\vec{r}, t)$ oft ungünstig

$$\underline{\Upsilon}(\vec{r}, t) = \sum_\mu u_\mu(\vec{r}) \, \underline{a}_\mu(t)$$

vollständige System im Ort

Operatorcharakter von $\underline{a}$ übernommen

→ große Vereinfach. „erhofft",

für alle Felder Ψ ist

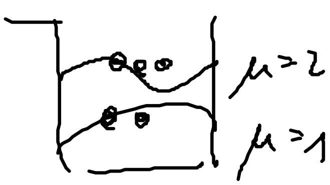
$$\underline{H} = \sum_\mu \varepsilon_\mu \, a^+_\mu \, a_\mu$$

gegeben d. Satz v. harmonischen Oszillatoren

(a^+ hermitisch adjungiert zu a_μ)

<u>Sprechweise:</u>

man kann die Felder / Teilchen die man quantisiert als Anregungen eines / vieler harmonischer Oszillatoren verstehen, $u_\mu(\vec{r})$ heißt μ-te Mode des Systems



die mit der Zahl $n_\mu = \langle a^+_\mu a_\mu \rangle$ besetzt ist.

wenn das für alle Felder gelingt ist eine einheitliche Beschreibg. f. Photonen, Elektronen, Phononen gefunden.

<u>1.2.2. Quantisierg. d. Schrödingerfelds</u>

a) $\mathcal{L}_S$ wählen

b) $\Pi_\psi = \frac{i\hbar}{2} \psi^*$ ($\mathcal{L}^S$ nach $\dot{\psi}$ ableiten)

c) $\psi \to \underline{\psi}$, $\Pi_\psi \to \underline{\Pi}_\psi \sim \underline{\psi}^+$

Operatoren sind $\underline{\psi}$, ψ^+

Sprechweise: der Heisenbergoperator $\underline{\psi}(\vec{r}, t)$
„vernichtet" ein Teilchen am Ort $\vec{r}$, Zeit t
der Heisenbergoperator $\underline{\psi}^+(\vec{r}, t)$
„erzeugt" ein Teilchen am Ort $\vec{r}$, Zeit t

d) $$\underbrace{[\underline{\psi}(r, t), \underline{\psi}^+(r', t)]}_{\psi\psi^+ \mp \psi^+\psi}{}_{\pm} = i\hbar\, \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Fermion $+$ → Elektron
Boson $-$ → Photon

e) Hamiltondichte / operator

$$\mathcal{H} = \dot{\psi} \frac{i\hbar}{2} \psi^+ - \mathcal{L}$$

$$= \frac{\hbar}{2m} \sum_i \frac{\partial \psi^+}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + u \psi^+ \psi$$

$$H = \int d^3r \, \mathcal{H} = \int d^3r \, \psi^+ \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i} + u \right)}_{\text{Standard } H_s \text{ der Schrödingergl.}} \psi$$

g) Moden: als Eigenfunktionen von H_S

$H_S u_\mu = \varepsilon_\mu u_\mu$ nehmen f. Moden entwicklg:

$$H = \int d^3r \, \psi^+ H_s \psi$$

$$= \int d^3r \sum_\mu u_\mu^* a_\mu^+ \underbrace{H_s \sum_{\mu'} u_{\mu'} a_{\mu'}}_{\text{Eigenwertproblem verwenden}}$$

$$= \sum_{\mu\mu'} \underbrace{\int d^3r \, u_\mu^* \varepsilon_{\mu'} u_{\mu'}}_{\varepsilon_{\mu'} \delta_{\mu\mu'}} a_\mu^+ a_{\mu'}$$

$$= \sum_\mu \varepsilon_\mu a_\mu^+ a_\mu$$

$\longrightarrow$ Summe über gekoppelte Oszillatoren