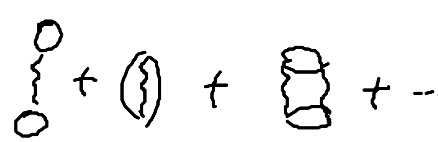
letzte VL bewiesen:

$$\left\langle T\, e^{\int^t dt'\, V(t')} \right\rangle = \exp\left\{ \sum \text{alle verbundenen Diagramme} \right\}$$

$$= \exp\left(\sum_l \tilde{U}_l \right),$$

$$\tilde{U}_l = \frac{1}{l!} \int dt_1 \int dt_2 \cdots \int dt_l \left\langle T\, V(t_1) V(t_2) \cdots V(t_l) \right\rangle$$

- die Störreihe ist <u>unsortiert</u> in der exp.-Fkt.

$$e^x \simeq 1 + x \simeq 1 +$$ 

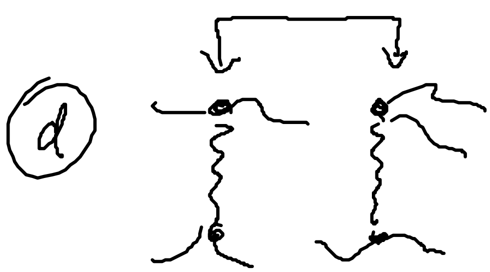
Zweite Ordnungsterme

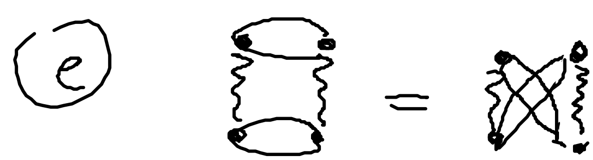
(unter Umständen aufpassen, wenn nur eine Ordnung gesucht ist)

– Diagramme sind immer noch zu viele und es gibt Regeln mit denen man entscheiden kann ob 2 gemalte Diagramme denselben Wert haben:

d) 2 Diagramme sind identisch wenn man sie durch Tausch der Zeitpunkte erzeugen kann

e) 2 Diagramme können durch Matrixelementsymmetrie identisch werden:





d) Zeitliniensymmetrie

Bei Term $\tilde{U}_e$ haben Diagramme die durch Permutation

fest

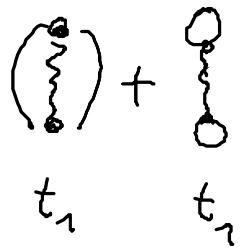
der Zeit auseinander hervorgehen denselben Wert:

$$\int^t dt_1 \cdots \int^t dt_i \int^t dt_j \cdots \int^t dt_l \,\langle T \cdots V_i V_j \cdots \rangle =$$

$$\int^t dt_1 \int^t dt_j \int^t dt_i \cdots \int^t dt_l \,\langle T \cdots V_j V_i \cdots \rangle \, .$$

In jeder Ordnung l sind $(l-1)!$ gewellte Diagramme auf diese Art ineinander überführbar.

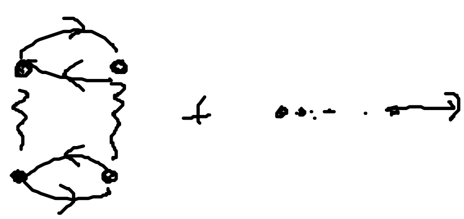
$\underline{l = 1}$



$\rightarrow$ nicht austauschbar

$(l-1)! = (1-1)! = 0! = \underline{\underline{1}}$

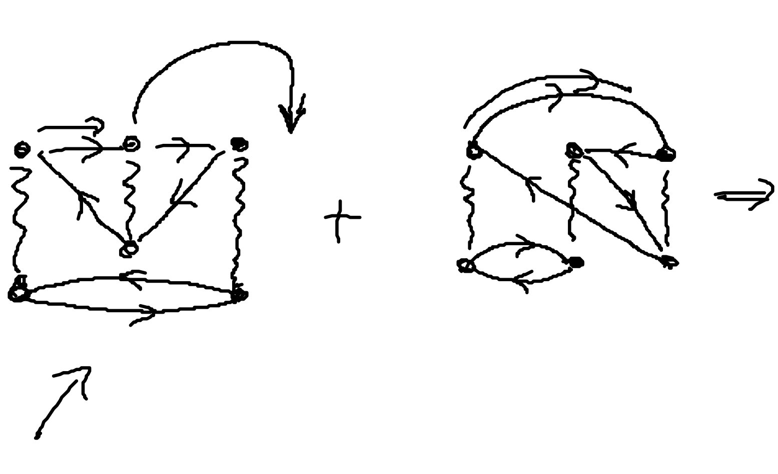
$\underline{l = 2}$



man findet kein gewellte, die ineinander zu überführen sind

$(l-1)! = (2-1)! = \underline{1}$

$\underline{l = 3}$



$\Rightarrow$ sind identisch !

um das auszurechnen und ...

mal 2 nehmen.

$$\Longrightarrow \quad \tilde{U}_l = \frac{1}{l!}\,(l-1)!\int dt_1 \cdots \int dt_l \,\langle T\, V_1 \cdots V_l \rangle_{\text{vvd}}$$

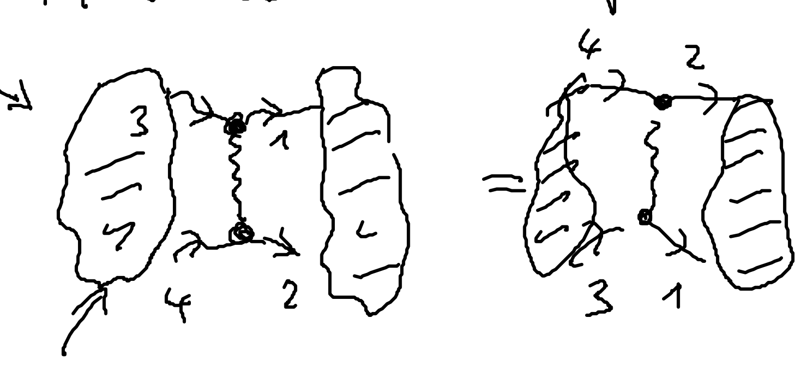
$\underbrace{\text{verschiedene}}_{\text{1. Art}}$ verbundene Diagramme

$$= U_l$$

e) Indexsymmetrie:

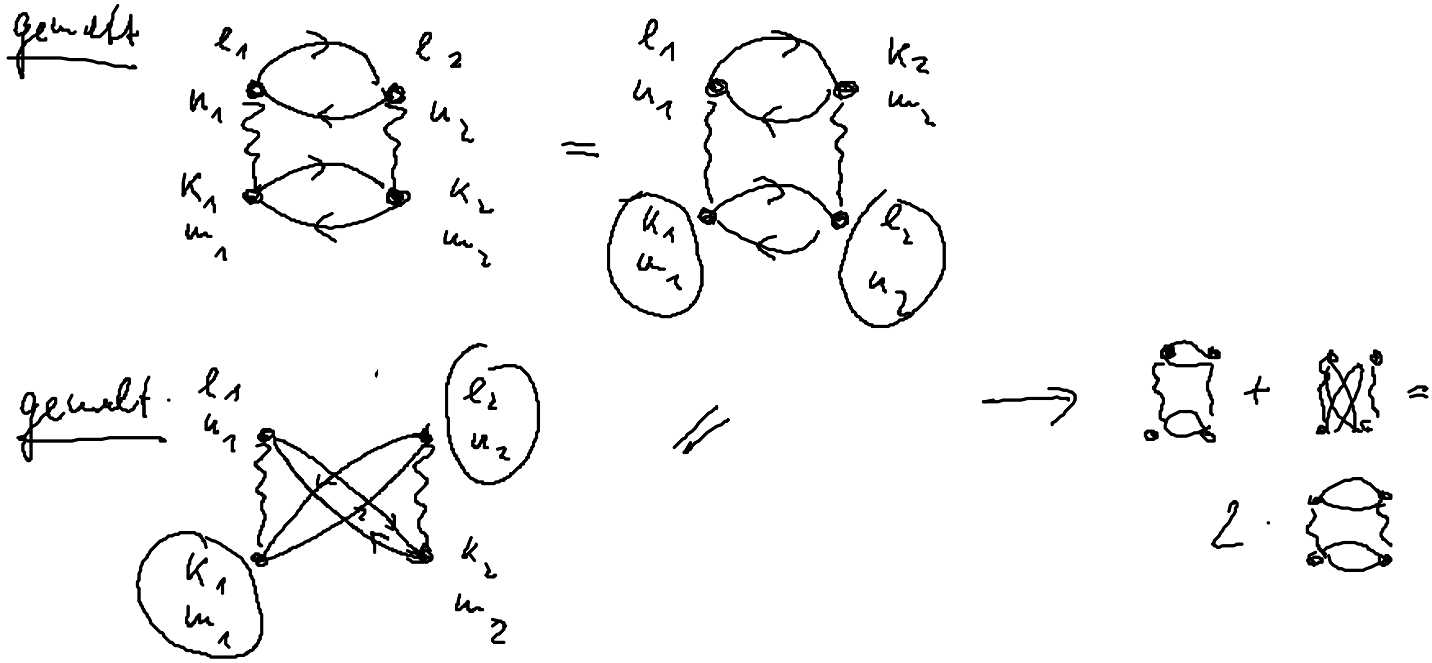
durch Indexsymmetrie treten topologisch äquivalente Diagramme 2. Art auf, für Coulomb:

$V_{1234} = V_{2143}$ → solche Symmetrien kann man an den Vertizes anwenden um Diagramme ineinander zu überführen:



andere Diagramme

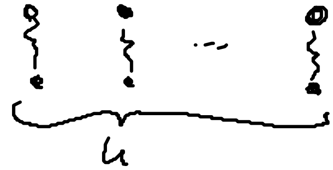
2. Ordnung C-WW:



man hätte in $\tilde{U}_e$ beide Diagramme gewählt
und dann festgestellt sie sind identisch,
dann wird man die 1 Diagramm · 2
berechnen müssen.

Allgemeines Verfahren um Zahl der topolog. äquivalenten
Diagramme 2. Art festzulegen:

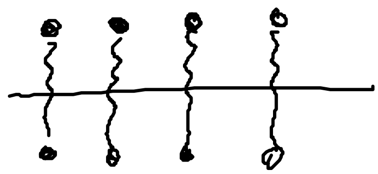
1 Linie festhalten, andere Linie drehen:

in der n-ten Ordnung 

→ 2^{n-1} topolog. äquivalente Diagramme

($n=2$ hatten wir 2.)

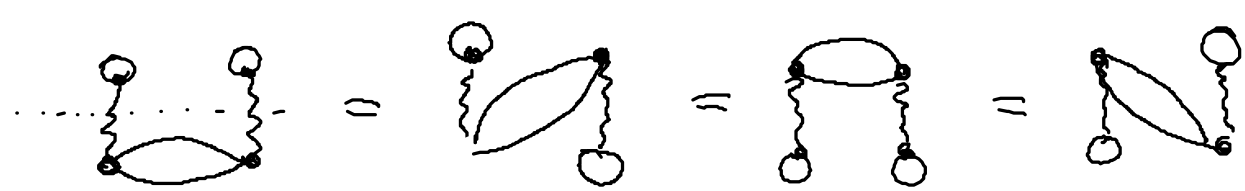
die festgehaltene Linie kann auch noch gedreht werden: bringt neue Diagramme, wenn kein Symmetrie bzgl. der Achse ——

 , nämlich wieder mal 2

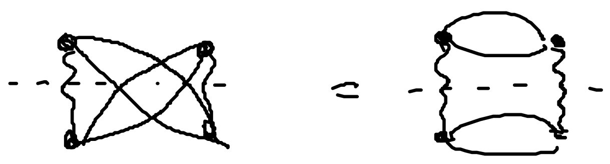
→ 2^{n-1} f. symmetrische Situation

2^n f. unsymmetrische Situation

unsymmetrisch $\quad 2^n = 2^2 = 4$:



symmetrisch $\quad 2^{n-1} = 2^1 = 2$



weitere Drehg. bringt nichts

Insgesamt: alle Diagramme aufmalen

+ dann Symmetrie suchen.

3.2. Ein Beispiel: Korrelationsenergie d. Elektronengases

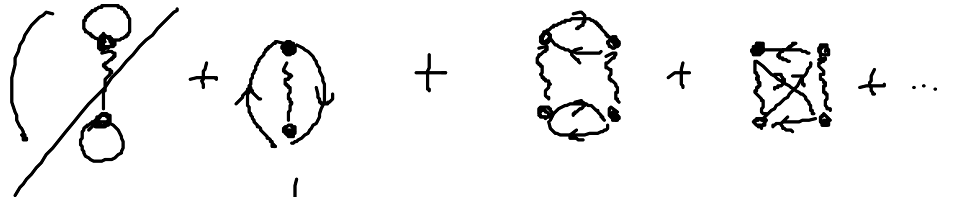
nur Skizze! $\longrightarrow$ einige heuristische Schritte

$$\Delta E = -\partial_\beta \ln \langle T e^{-\int_0^\beta d\beta' H_W(\beta')} \rangle$$

Vielteilch-WW $\qquad$ (aus Zustandssumme)

$$H_W = \text{Coulomb-WW} = \frac{1}{2} \sum_{nmkl} V_{nmkl}\, a_n^\dagger a_m a_k a_l$$

$$\Delta E = -\partial_\beta \sum_l \frac{(-1)^l}{l!} \int_0^\beta d\beta_1 \cdots \int_0^\beta d\beta_l \langle T H_W(\beta_1) \cdots H_W(\beta_l) \rangle$$

$$\Delta E = -\partial_\beta \Big($$  $$\Big)$$

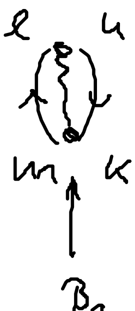
$\swarrow$ 0 $(q = 0)$ $\qquad$ $l = 1$ $\qquad$ $\downarrow$ Hartree-Fock

$l = 2$ $\qquad$ $l = 3$

Korrelationsenergie im Unterschied zu Hartree-Fock

a) Störungstheorie f. $l = 1$

Das erste Diagramm liefert bereits den Hartree-Fock Beitrag



$$= (-1)^{\text{loop}} \, \frac{(-1)^{l=1}}{2} \sum_{nmlk} \int_0^\beta d\beta_1 \, V_{nmlk} \, G_{nk}(0) \, G_{ml}(0)$$

$\frac{1}{2} V_{nmlk}$ $\qquad$ Fermifkt. $\qquad$ δ_{nk} $\qquad$ δ_{ml}

$$= \frac{1}{2} \sum_{n,m} \beta \, V_{nmmn} \, f_n \, f_m$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n,m} \beta \, V_{q_n - q_m} \, f_{q_n} \, f_{q_m}$$

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \sum_{qq'} V_q \, f_{q+q'} \, f_{q'}$$

$\Theta(k_F - |\vec{q} - \vec{q}'|)$ $\qquad$ $\Theta(k_F - q')$

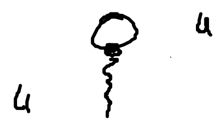
f. $T \to 0$

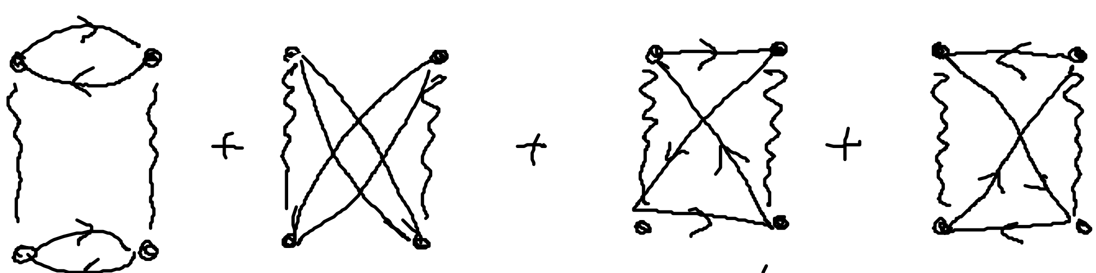
$$= - N E_{ryd} \frac{0.961}{r_s}$$

$$\left(r_s^{-3} \right) = \frac{4\pi}{3} n a_0^3$$

mittlere Zahl v. Elektronen im Volumen d. Bohrradius

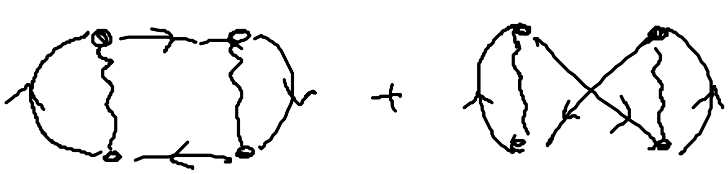
b) Störungstheorie 2. Ordnung – Korrelationsenergie

24 Diagramme :  $\to 0$



identisch

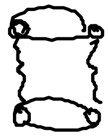
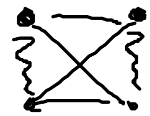
identisch

 + . . .

2 weitere dieser Gruppe 

$T \to 0$ verschwinden

(Mitteilung o. Beweis)

$\Delta E^{(2)} \sim 2$  $+\ 2$ 

(a) (b)

aus voriger VL abschreiben:

$$a = \frac{1}{2} \sum_{qkl} \frac{V_q^2}{\varepsilon_k + \varepsilon_l - \varepsilon_{k+q} - \varepsilon_{l-q}} \, f_k f_l (1-f_{k+q})(1-f_{l-q})$$

$(T \to 0)$

$\longrightarrow \infty$ wird gezeigt

$$T \to 0: \sum_{q,k,l} \ : \ \sum_{\substack{l,k < k_F \\ |k+q| > k_F,\ |l-q| > k_F}}$$

sehen uns d. Integrand f. $q \to 0$ an!

$$a \sim \underbrace{\int \frac{d^3q}{q^4}}_{\text{Coulomb } V_q} \underbrace{\int\limits_{\substack{k<k_F \\ |k+q|>k_F}} d^3k}_{\substack{k \text{ lebt auf klein} \\ \text{„Schale" um } k_F \\ \text{Dicke} \sim q}} \underbrace{\int\limits_{\substack{l<k_F \\ |q-l|<k_F}} d^3l}_{\substack{\text{analog} \\ \sim q}} \frac{1}{(q^2+\vec{q}\cdot(\vec{k}-\vec{l}))}$$

$$q \to 0 : \int \frac{dq\, q^2}{q^4} \; \underbrace{q^2}_{\text{Schicht der Dicke } q} \; \frac{1}{q}$$

$$= \int_{\to 0} \frac{dq}{q} = \ln q \Big|_0 \to \infty$$

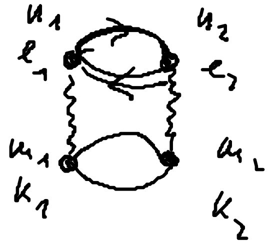
Offensichtlich divergiert die 2. Ordg. Störungstheorie.

<u>Ausweg?</u> <u>zur Info:</u> b kann ohne Probleme berechnet werden.

$$(b) \sim V_q^{\cancel{2}} V_{k-l+q}$$

macht die Singularität schwächer $q \to 0$

Man stellt fest, daß alle anderen Ordnungen V_q^n vorkommend auch divergieren.



$$\longrightarrow \quad V_{n_1 m_1 l_1 k_1} \; V_{n_2 m_2 l_2 k_2}$$

$l_1 = n_2$

$n_1 = l_2$ aufgrund Elektronpropagators

$$= V_{n_1 - l_1} \; V_{n_2 - l_2}$$

$$= \left(V_{n_1 - l_1}\right)^2 = \frac{1}{(n_1 - l_1)^4}$$

$$\sim \frac{1}{q^4}$$

$\longrightarrow$ die Ringe machen den am meisten divergenten Beitrag! Für $r_s \to 0$

$r_s \sim \frac{1}{n}$ für hohe Dichte!

Man sollte also versuchen, <u>alle</u> Ringdiagramme innerhalb einer Ordnung l und dann $\forall$ Ordnung. l

auf schummeln. (Gell-Mann, Brückner)

Das Ergebnis ist: man erhält Reihe der Form:

$$A\frac{1}{r_s} + B\frac{1}{r_s^2} + C\frac{1}{r_s^3} \dots$$

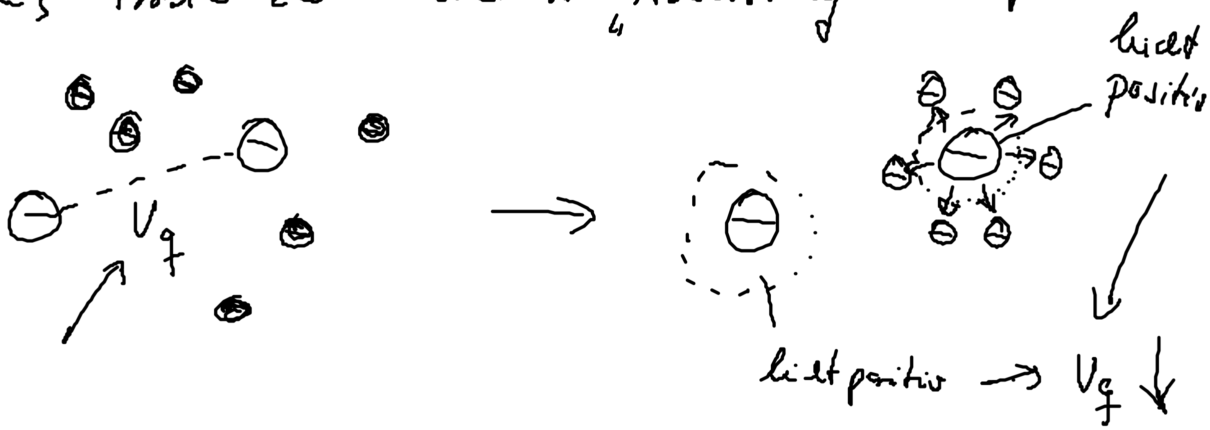
$$= \infty + \infty + \infty = \text{endliches}$$

$$r_s \to 0$$

die Funktion ist nicht entwickelbar f. $r_s \to 0$

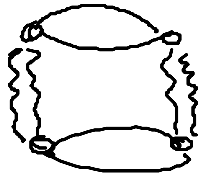
$\Rightarrow$ Störungstheorie kann man in begrenzter Ordnung nicht anwenden. (Taylor $\nexists$ nicht)

Versuch dieses Problem zu beheben ist „Abschirmung" einzuführen



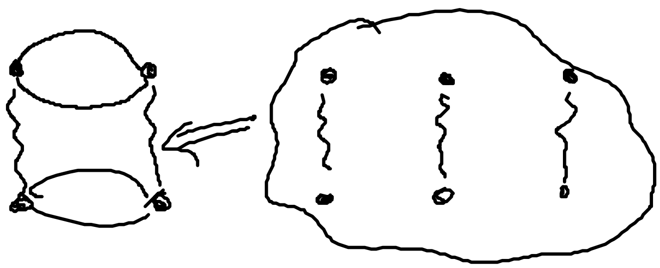
$$\frac{V_q}{\varepsilon_q}$$

Abschirmung modifiziert die WW

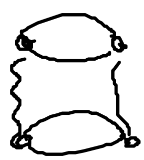
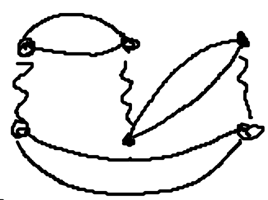
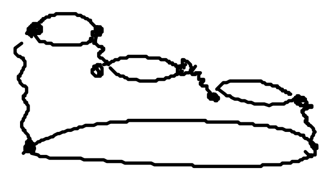


divergente
Diagramm 2. Ordng. wird „abgeschirmt"

endlich sein, weil $\quad \frac{1}{q^2} \to \frac{1}{q^2+k^2}$

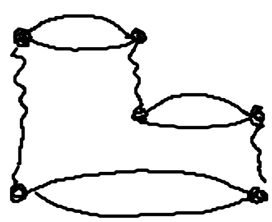


höhere Ordng soll als Abschirmg. eingebaut werden

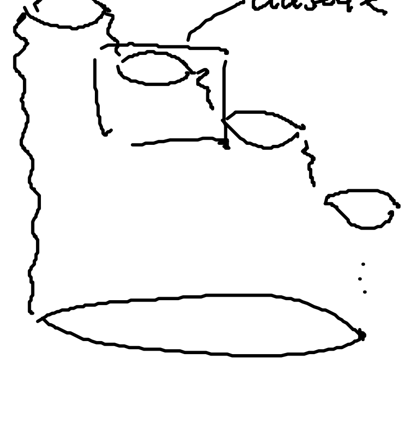
Reihe:  +  + 

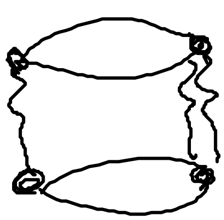
aus Ringdiagramme

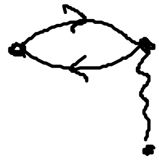
+ ...



ansehen



$\equiv$ 

Ziel:  = ? Und dann n-Mal einbauen.