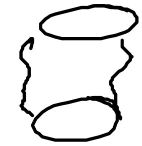
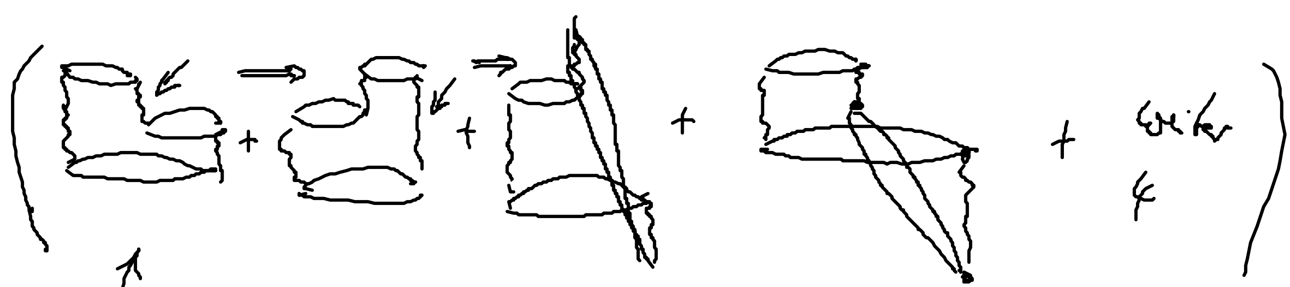
zur Erinnerung: hatten ∞ Wert f. Ringdiagramm 

erhalten, Idee: Diagramm durch andere ∞-wertige Ringe renormieren, um zu einem endlichen Wert zu kommen

sehen uns Beitrag 3. Ordnung an, um Gefühl für alle höheren Terme zu bekommen und diese aufzusummieren, nur Ringe: $r_s \to 0$

$n \to \infty$

$-\partial_\beta$ 


um die Energie zu kriegen

nur noch Ringdiagramme

durch Drehen der WW-Linien

$2^n = 8, n = 3$ „7"

1. Diagramm ansehen:

$-\partial_\beta$ 


$$= -\partial_\beta \, (-1)^3 \, \frac{1}{3!} \, \frac{1}{2^3}$$

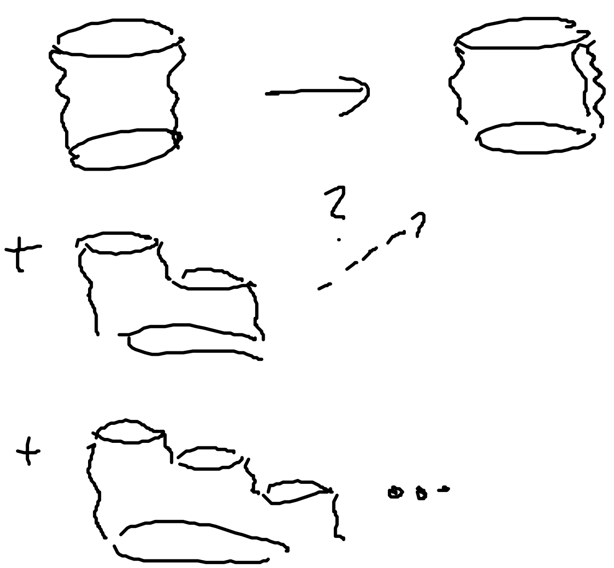
Loop — Ordg $\left(\frac{1}{n!}\right)$ — Vorfaktor vor Coulomb-WW

$$\int_0^\beta d\beta_1 \int_0^\beta d\beta_2 \int_0^\beta d\beta_3 \sum_{(1,2,3)} V_{n_1 m_1 l_1 k_1} V_{n_2 m_2 l_2 k_2} V_{n_3 m_3 l_3 k_3}$$

$$G_{n_1 l_2}(\beta_1-\beta_2)\, G^+_{l_1 n_2}(\beta_1-\beta_2)\, G_{m_2 l_3}(\beta_2-\beta_3)\, G^+_{k_3 k_2}(\beta_2-\beta_3)$$

$$G^+_{k_1 m_3}(\beta_1-\beta_3)\, G_{m_1 k_3}(\beta_1-\beta_3)$$

Idee: zwisch. Ordg. „geschickt" zu renormie



hier soll ein neue, abgeschirmte Coulomb-WW steh

$V_q \to W_q$

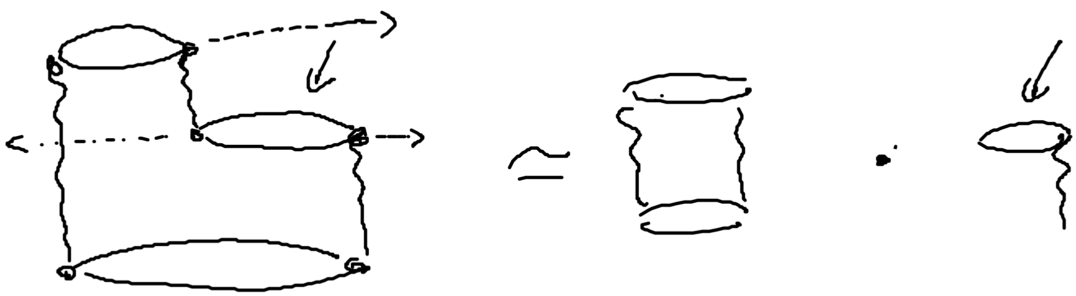
Streichg: $\frac{1}{3!}$, Änderg. der Grenzen

$$= -\partial_\beta (-1)^3 \frac{1}{Z^3} \int^{\beta} d\beta_1 \int^{\beta_1} d\beta_2 \int^{\beta_2} d\beta_3 \sum_{1,2,3} v_1 v_2 v_3$$

$$G_{k_1 l_2}(\beta_1-\beta_2)\, G^+_{l_1 k_2}(\beta_1-\beta_2)$$

$$G^+_{k_1 m_3}(\beta_1-\beta_3)\, G_{m_1 k_3}(\beta_1-\beta_3)$$

$$G_{m_2 l_3}(\beta_2-\beta_3)\, G^+_{k_2 m_3}(\beta_2-\beta_3)$$



$\beta$ $\beta_1$ $\beta_2$ $\beta_3$ $0$

Jeder Prozeß soll kein Gedächtnis vorliegen.

analog zur Lindhard formel $\omega \to 0$,

dazu sollen die 3 Prozesse „gleichzeitig" stattfinden:

Abschirmung wird „gleichzeitig" ohne Retardierung

bei der Streuung aufgebaut.

$$= \sum_{1,2,3} V_1 V_2 V_3 \left(-\partial_\beta \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \int_0^{\beta} d\beta_1 \int d\beta_3 \, G_{u_1 l_2}(\beta_1-\beta_3)\right.$$

$\beta_2 \to \beta_1$

$$G^+_{l_1 u_2}(\beta_1-\beta_3)\, G^+_{k_1 m_3}(\beta_1-\beta_3)\, G_{m_1 k_3}(\beta_1-\beta_3)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^{\beta_1 \to \beta} d\beta_2 \, G_{m_2 l_3}(\beta_2-\cancel{\beta_3})\, G_{k_2 u_3}(\beta_2-\cancel{\beta_3})$$

Damit taucht kein Zeitverschränkg. mehr auf!

Jetzt noch Index ausnutzg. für $\sum V_1 V_2 V_3$

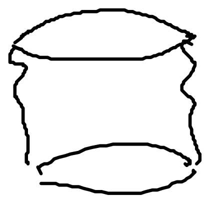
$$\sum V_1 V_2 V_3 = \sum_{(1,2,3)} V_{u_1 m_1 l_1 k_1} V_{u_2 m_2 l_2 k_2} V_{u_3 m_3 l_3 k_3}$$

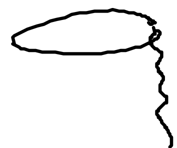
$$\sum_{(1)} V_{u_1-l_1} \delta_{u_1-l_1, k_1-m_1} \sum_{(2)} V_{u_2-l_2} \delta_{u_2-l_2, k_2-m_2} \sum_{(3)} V_{u_3-l_3} \delta_{u_3-l_3, k_3-m_3}$$

$$\underline{\sum_1 V_{q_1} \delta_{q_1, k_1-m_1}} \sum_2 V_{q_2} \delta_{q_2, k_2-m_2} \underline{\sum_3 V_{q_3} \delta_{q_3, k_3-m_3}}$$

jetzt ist: $k_1 = m_3$, $m_1 = k_3$ über Kronecker aus G's

$$\underbrace{\sum V_{q_1}^2 \, \delta_{q_1,k_1-m_1}}\quad \underbrace{\sum_2 V_{q_2}\, \delta_{q_2,k_2-m_2}}$$



 $\rightarrow$ „$-\frac{1}{2} V_q$"

$\downarrow$

Kann nicht

 $$= \underbrace{\int_0^\beta d\beta_1 \sum_2 G^+_{m_2 m_2}(\beta_2)\, G_{k_2 k_2}(\beta_2)\, \delta_{q,k_2-m_2}}$$

$$= \int_0^\beta d\beta_2 \sum_2 f^+_{m_2} f_{k_2}\, e^{\beta_2(\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{m_2})}\, \delta_{q,k_2-m_2}$$

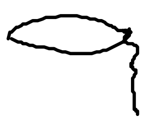
$$= \sum_2 \frac{e^{\beta(\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{m_2})}-1}{\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{m_2}}\, f^+_{m_2} f_{k_2}\, \delta_{q,k_2-m_2}$$

$$= \sum_2 \frac{f^+_{k_2} f_{m_2} - f^+_{m_2} f_{k_2}}{\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{m_2}}\, \delta_{q,k_2-m_2}$$

$$= \sum_2 \frac{(1-f_{k_2}) f_{m_2} - (1-f_{m_2}) f_{k_2}}{\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{m_2}}\, \delta_{q,k_2-m_2}$$

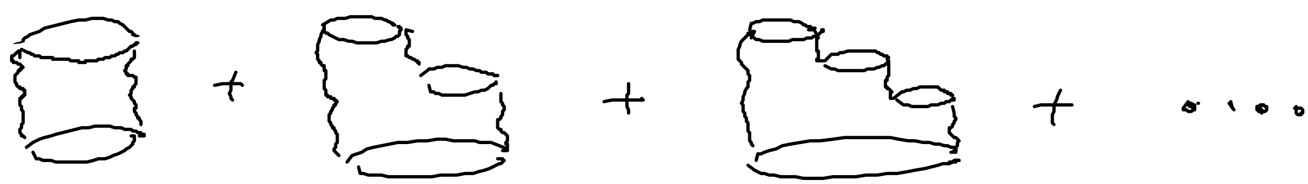
$$= -\sum_{2} \frac{f_{m_2} - f_{k_2}}{\varepsilon_{m_2} - \varepsilon_{k_2}} \, \delta_{q, k_2 - m_2}$$

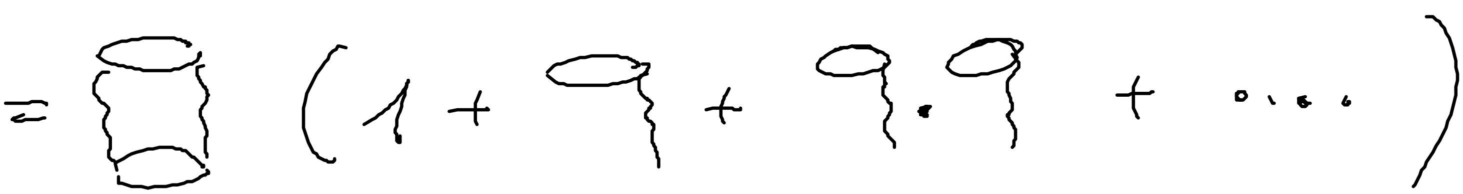
$$= -\sum_{k} \frac{f_k - f_{k-q}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q}}$$

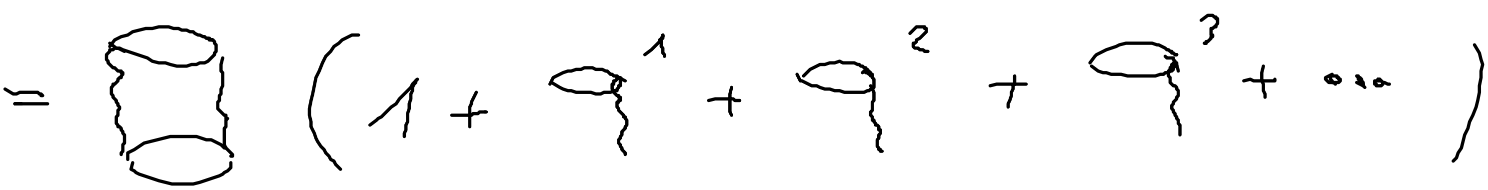


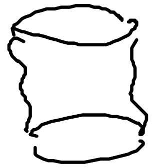
$$= V_q \sum_{k} \frac{f_k - f_{k-q}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q}}$$

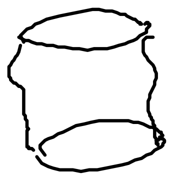
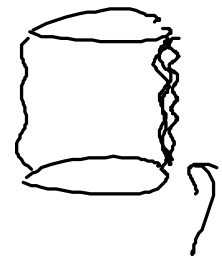
jetzt kann man für alle höhere Ordnungen ähnliches tun:







$=$  $\left( \dfrac{1}{1 - q} \right)$

$=$  $\cdot \underbrace{\left( \dfrac{1}{1 - V_q \sum_k \dfrac{f_k - f_{k-q}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q}}} \right)}_{1/\varepsilon_q} =$ 

$\dfrac{V_q}{\varepsilon_q}$

$\varepsilon_q$ ist die dielektrische Funktion des Elektronengases $\omega \to 0$.

Offensichtlich wird die nackte Coulomb-WW in den divergenten Diagrammen 2. Ordnung durch eine abgeschirmte WW ersetzt. $V_q \to \dfrac{V_q}{\varepsilon_q}$

für kleine $q$ $\quad \varepsilon_q = 1 + \left(\dfrac{\kappa}{q}\right)^2$, $\kappa$ ist die inverse Abschirmlänge

Im Ortsraum: $\dfrac{1}{\ } \to \dfrac{e^{-\kappa r}}{\ }$ wird die

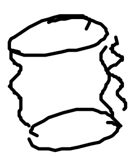
Coulomb-WW zu Yukawa Potential.

Die Kurzreichweitigkeit verhindert die Probleme bei

$q \to 0 \quad V_q \to \infty \longrightarrow D \to \infty$:

$$V_q \sim \frac{1}{q^2} \longrightarrow W_q \sim \frac{1}{q^2+\kappa^2} \qquad \kappa^2 \sim \overset{\text{Dichte}}{n}$$

Könnte jetzt jenseits v. Hartree-Fock, die Korrelationsenergie berechnen: Für hohe Dichte beschränke wir uns auf die Ringdiagramme, also

$-\partial_\beta$  $\longrightarrow \frac{1}{2} \sum_{q,k,l} \frac{\overset{\xi}{W_q}\, V_q}{\varepsilon_k + \varepsilon_l - \varepsilon_{k+q} - \varepsilon_{l-q}}$

$\cdot (1-f_k)(1-f_l)\, f_{q+l}\, f_{q-k}$

Ableitg. nach oberer Grenze

sehe uns nur den Beitrag an unterer Grenze $q \to 0$ an,

$$\underbrace{\int dq\, q^2}_{\Sigma_q} \; \underbrace{\frac{1}{(q^2+k^2)}}_{\omega_q} \; \underbrace{\frac{1}{q^2}}_{v_q} \; q^2 \; \frac{1}{q}$$

neu

$T \to 0$ (sieh vorletzte VL)

E-Nenner

$k, l, m$ in dünner $q$ Schale

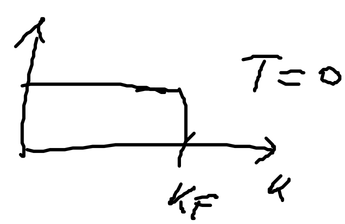
$$= \int_0 dq \, \frac{q}{(q^2+k^2)} \sim \int_0 dx \, \frac{1}{x+k^2} = \ln(k^2+x)\Big|_0$$

$$= -\ln(k^2) \sim -\ln(\partial_\mu n) \sim -\ln \partial_\mu k_F^3$$

untere Grenze $\quad k^2 \sim \partial_\mu n$

El-Dichte

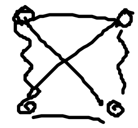
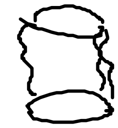
$\mu = \varepsilon_F \sim k_F^2$




$$= -\ln(\partial_\mu \mu^{3/2}) = -\ln(\mu^{1/2}) \sim -\ln k_F \sim \ln r_s$$

Die Korrelationsenergie ist

$$\Delta \tilde{E}^{c} = \left(-0{,}049 + 0{,}06 \ln r_s\right) \mathrm{Ryd} \cdot N$$

$$\underbrace{r_s \sim n^{-1}}_{0} \, .$$

Im Hochdichtefall $r_s \to 0$ $(n \to \infty)$ ist dies eine exakte Lösung f. die Korrelationsenergie d. Elektronengases.

Aufgrund $\sim \ln r_s$, kann dieses Ergebnis nicht in Störungstheorie erhalten werden.