4. Theorie der Propagatoren

Mit $\rho_{nm}(t) = \langle a_n^+(t)\, a_m(t) \rangle = sp(\rho\, a_n^+(t)\, a_m(t))$

könne die meiste Observablen berechnet werden

ρ_{nm} : Dichtematrixelemente

$a_n^+(t) \equiv a_{nH}^+(t)$ sind

Operatoren im Heisenbergbild.

siehe 1. VL : jede Observable (Strom, Polarisation)

können durch $\rho_{nm}(t)$ ausgedrückt werden

4.1. Observable

um den Anschluß an Propagatoren G, D

zu bekommen die von 2 Zeiten abhängen,

definieren wir :

$$\rho_{nm}(t,t') = \langle T\, a^{\dagger}_{mH}(t)\, a_{nH}(t') \rangle$$

$$= Sp\left(\rho_H\, T a^{\dagger}_{mH}(t)\, a_{nH}(t')\right) \equiv \underbrace{G^{H}_{nm}(t,t')}$$

„Heisenbild" $\hat{=}$ volle Wechselwirkung „$\Rightarrow$"

Interpretation: $\rho_{nn}(t,t')$ ist eine Wahrscheinlichkeitsamplitude, daß zur Zeit t' ein Teilchen vernichtet und zur Zeit t ein Teilchen erzeugt wird mit $n \to m$.

Idee: zurückführen auf die Propagatoren im WW-Bild

$$H = H_0 + V$$

muß abgespalten werden

$$\rho_H = e^{-\beta(H_0 + V)}$$

siehe ÜA

$$= e^{-\beta H_0}\, T e^{-\int_0^{\beta} d\beta' V(\beta')}$$

$$V(\beta') = e^{\beta' H_0}\, V\, e^{-\beta' H_0}$$

ist also schon im WW-Bild

bzgl. β

$$\rho_{nm}(t,t') = \frac{1}{Z}\, sp\left(e^{-\beta H_0}\, T e^{-\int_0^\beta d\beta' V(\beta')}\, T\, a^+_{H_n}(t)\, a_{H_m}(t')\right)$$

Zustandssum (H_0) Zustandssumme ($V+H_0$)

$$= \frac{Z_0}{Z}\, sp\left(\rho_0\, T \cdots\; T \cdots\right)$$

dieser Term ist noch im WW-Bild

$$= \frac{\left\langle T e^{-\int_0^\beta d\beta' V(\beta')}\, T\, a^+_{H_n}(t)\, a_{H_m}(t')\right\rangle}{\left\langle T_\beta\, e^{-\int_0^\beta d\beta' V(\beta')}\right\rangle}$$

$\frac{Z}{Z_0}$

$$a_H(t) = U^+(t,0)\, a_S\, U(t,0)$$

Heisenberg Bild Schrödingerbild

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}, \quad U^+ = e^{\frac{i}{\hbar} H t}$$

$$a_W(t) = U_0^+(t,0)\, a_S\, U_0(t,0)$$

Wechselwirk. bild

$$U_0 = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}, \quad U_0^+ = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t}$$

$$a_H(t) = \underbrace{U^+(t,0)\, U_0(t,0)}_{W^+(t,0)} \underbrace{\underbrace{a_W(t)\, U_0^+(t,0)}_{a_S}\, U(t,0)}_{W(t,0)}$$

nur Zeitentwicklg.:

$$g_{nm}(t,t') = \frac{\left\langle T_\beta\, e^{-\int_0^\beta d\beta'\, V(\beta')}\; T\, W^+(t,0)\, a_n^+(t)\, W(t,0)\, W^+(t',0)\, a_m(t')\, W(t',0) \right\rangle}{\left\langle T_\beta\, e^{-\int_0^\beta d\beta'\, V(\beta')} \right\rangle}$$

a_n^+, a_n jetzt in WW Bild (so wie immer)

$$\left.\begin{aligned} W^+ &= T\, e^{+i/\hbar \int_0^t dt'\, V(t')} \\ W &= T\, e^{- \cdots} \end{aligned}\right\}$$ nach unten der Entwicklungsformel f. Exp.-Fkt.

eine bisher unnatürliche Sache ist, daß

β und t sich um „i" unterscheiden

in den Exponenten → keine gemeinsame Achse f. Diagrammtechnik,

Daher stellen wir uns vor, wir hätten von Anfang an $g_{nm}(\tau,\tau')$ betrachtet mit $\frac{it}{\hbar}=\tau$, $\frac{it'}{\hbar}=\tau'$

$$\Rightarrow \quad a \longrightarrow e^{\tau H}\, a\, e^{-\tau H}$$

$$W = e^{-\int_0^{\tau} d\tau''\, V(\tau'')}$$

$$W^+ = e^{\int_0^{\tau} d\tau''\, V(\tau'')}$$

Matsubara-Technik rechnet mit imaginären Zeiten (formal)

$W(\tau',0)$

$$g_{nm}(\tau,\tau') = \frac{\langle T_\beta W(\beta,0)\, \overbrace{T\, W^+(\tau,0)\, a_n^+(\tau)\, \underline{\underline{W(\tau,0)\, W^+(\tau',0)}}\, a_m(\tau')}^{*} \rangle}{\langle T_\beta W(\beta,0) \rangle}$$

$$* = T\, e^{+\int_0^{\tau} d\tau''\, V(\tau'')}\, a_n^+(\tau)\, \underline{\underline{e^{-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau''\, V(\tau'')}}}\, a_m(\tau')\, e^{-\int_0^{\tau'} d\tau''\, V(\tau'')}$$

$\tau > \tau''$ Zeitordnung
über T

$$= T\, a_n^+(\tau)\, e^{\int_0^{\tau'} d\tau'' V(\tau'')}\; a_m(\tau')\; e^{-\int_0^{\tau'} d\tau'' V(\tau'')}$$

$$= T\, a_n^+(\tau)\, a_m(\tau')$$

$$\rho_{nm}(\tau,\tau') = \frac{\left\langle T\, e^{-\int_0^{\beta} d\beta' V(\beta')}\; a_n^+(\tau)\, a_m(\tau') \right\rangle}{\left\langle T\, e^{-\int_0^{\beta} d\beta' V(\beta')} \right\rangle}$$

T ordnet β, und ordnet unabh. τ

Am Ende: $\tau \to \tau'$, $\dfrac{it}{\hbar} = \tau$,

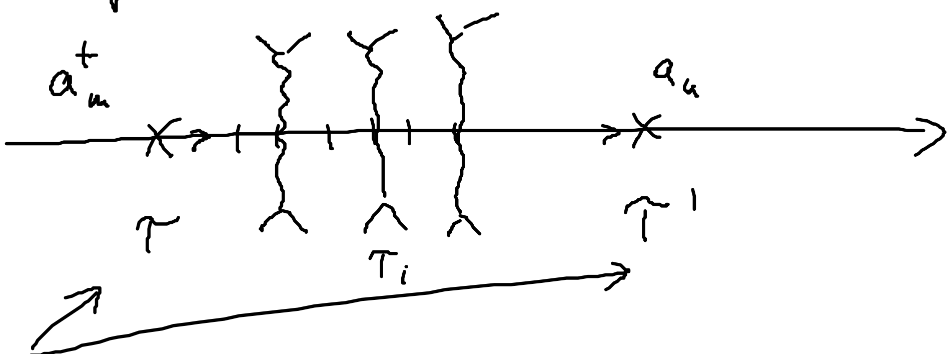
um die eigentliche Dichtematrix $\rho_{nm}(t)$

für alle Observablen.

4.2. Verbundene Diagramme

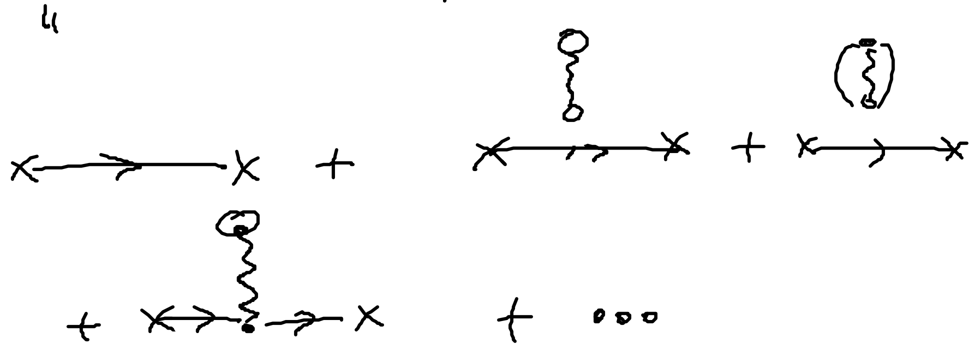
$$\rho_{nm}(\tau,\tau') = \frac{\sum_n \frac{1}{n!}\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \dots \int_0^\beta d\tau_n \langle T\, V(\tau_1)\dots V(\tau_n)\, a_n^+(\tau)\, a_m(\tau')\rangle}{\sum_n \frac{1}{n!}\int_0^\beta d\tau_1 \dots \int_0^\beta d\tau_n \langle T\, V(\tau_1)\dots V(\tau_n)\rangle}$$

Diagrammtechnik Zähler:

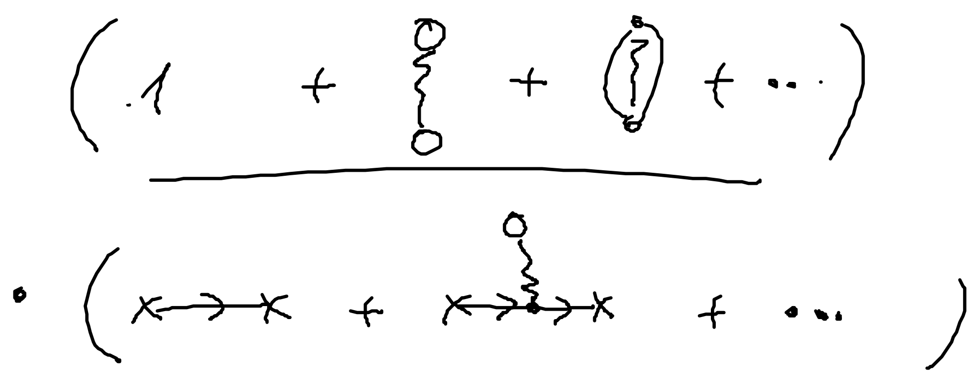


Zusätzliche 2_n externe" Zeitpunkte

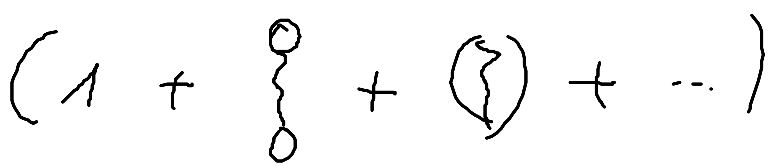
Zähler:



=



Nenner =



$$\rho_{nm}(\tau,\tau') = \sum_n \frac{1}{n!}\int_0^\beta d\tau_1 \cdots \int_0^\beta d\tau_n \underbrace{\langle T\, V(\tau_1)\ldots V(\tau_n)\, a_n^+(\tau)\, a_m(\tau')\rangle}_{\text{alle verbund. Diagramme}}$$

Die Beiträge sind nur von verbund. Diagrammen zu nehmen!

4.3. Diagrammregeln

um $\rho_{nm}(\tau,\tau')$ zu berechnen

a) Male Diagramme n-ter Ordnung.

1.) male 2 externe Zeitpunkte × ×
und n WW Linien auf der τ-Achse

2.) Konstruiere alle topologisch verschieden Diagramme die verbunden sind
(Zu einem Diagramm gehören je $2^n\, n!$ topologisch gleiche Diagramme: 2^n durch Umindizieren
$n!$ durch verschied. Zeitkategorien, Zeitpunkttausch)

b) Diagramme in Formelsprache übersetzen

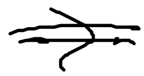
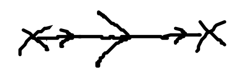
1.) jede WW-Linie wird in Matrixelement $V_{k_i l_i m_i n_i}$ umgeschrieben ($i \hat{=} \tau_i$)

2) für jede Fermionlinie wird G als Propagator genommen

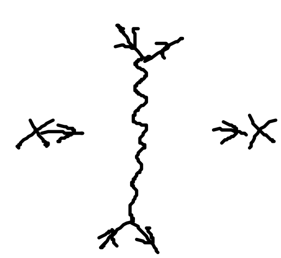
3) Loopregel!

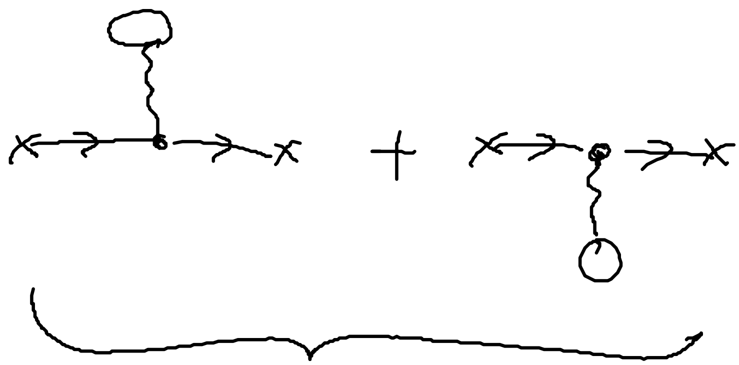
4) die $2^n n!$ identischen Diagramme <u>cancelen</u> die Faktor $\left(\underline{\underline{\frac{1}{2}}} V_{nkln}\right)^n$ und $\underline{\underline{\frac{1}{n!}}}$ in der Summe

Beispiel

 = 0.te Ordnung:  „freier Ausbreitg. eines Teilchens zwischen 2 Zeitpunkten"

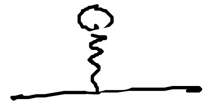
voller Propagator

1.te Ordnung: 



≙ 1 Familie

$2^1 \cdot 1! = \underline{\underline{2}}$



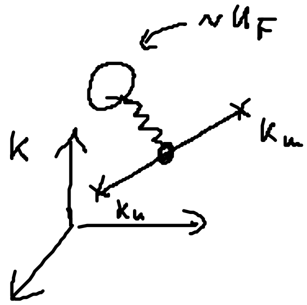
Stellvertretend f. beide oben

\+ 

≙ 2. Familie

Interpretation in k Raum

1. Familie

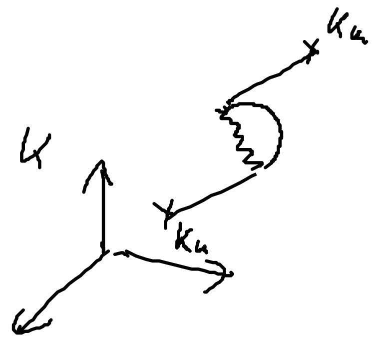


Elektron nimmt Weg in k-Raum, unterwegs passiert was: ein and. Elektr. wird „virtuell an Zustand raus und reingelegt"

→ WW mit Ladungsdichte

Hartree-Term

2. Familie k



unterwegs tauscht die El
ihre Plätze im k-Raum

„Austauschterm"

„Fockterm"