4. Theorie der Propagatoren

Mit $\rho_{nm}(t) = \langle a_n^+(t)\, a_m(t) \rangle = \mathrm{sp}\left(\rho\, a_n^+(t)\, a_m(t)\right)$

können die meiste Observablen berechnet werden

ρ_{nm}: Dichtematrixelemente

$a_n^+(t) \equiv a_{nH}^+(t)$ sind

Operatoren im Heisenbergbild.

siehe 1. VL: jede Observable (Strom, Polarisation)

können durch $\rho_{nm}(t)$ ausgedrückt werden

4.1. Observable

um den Anschluß an Propagatoren G, D

zu bekommen die von 2 Zeiten abhängen,

definieren wir:

$$g_{nm}(t,t') = \langle T\, a^{\dagger}_{mH}(t)\, a_{nH}(t') \rangle$$

$$= \mathrm{Sp}\left(\rho_H\, T a^{\dagger}_{mH}(t)\, a_{nH}(t')\right) \equiv \underbrace{G^{H}_{nm}(t,t')}$$

„Heisenbild" $\hat{=}$ volle Wechselwirkung „$\Rightarrow$"

Interpretation: $g_{nm}(t,t')$ ist eine Wahrscheinlichkeitsamplitude, daß zur Zeit t' ein Teilchen vernichtet und zur Zeit t ein Teilchen erzeugt wird mit $n \to m$.

Idee: zurückführen auf die Propagatoren im WW-Bild

$$H = H_0 + V$$

muß abgespalten werden

$$\rho_H = e^{-\beta(H_0 + V)}$$ siehe ÜA

$$= e^{-\beta H_0}\, T e^{-\int_0^{\beta} d\beta'\, V(\beta')}$$

$$V(\beta') = e^{\beta' H_0}\, V\, e^{-\beta' H_0}$$

ist also schon im WW-Bild

bzgl. β

$$\rho_{um}(t,t') = \frac{1}{Z}\, \mathrm{Sp}\left(e^{-\beta H_0}\, T e^{-\int_0^\beta d\beta' V(\beta')}\, T a^+_{H_n}(t)\, a_{H_m}(t')\right)$$

Zustandssum (H_0)   Zustandssumme ($V+H_0$)

$$= \frac{Z_0}{Z}\, \mathrm{Sp}\left(\rho_0\, T \cdots\, T \cdots\right)$$

dieser Term ist noch im WW-Bild

$$= \frac{\left\langle T e^{-\int_0^\beta d\beta' V(\beta')}\, T a^+_{H_n}(t)\, a_{H_m}(t') \right\rangle}{\underbrace{\left\langle T_\beta\, e^{-\int_0^\beta d\beta' V(\beta')} \right\rangle}_{\frac{Z}{Z_0}}}$$

$$a_H(t) = U^+(t,0)\, a_S\, U(t,0)$$

Heisenberg Bild   Schrödinger Bild

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}\,, \quad U^+ = e^{\frac{i}{\hbar} H t}$$

$$a_W(t) = U_0^+(t,0)\, a_S\, U_0(t,0)$$

Wechselwirkungsbild

$$U_0 = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}, \quad U_0^+ = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t}$$

$$a_H(t) = \underbrace{U^+(t,0)\, U_0(t,0)}_{W^+(t,0)} \underbrace{a_W(t)\, U_0^+(t,0)}_{a_S}\underbrace{U(t,0)}_{W(t,0)}$$

nur Zeitentwicklg.:

$$g_{nm}(t,t') = \frac{\left\langle T_\beta\, e^{-\int_0^\beta d\beta' V(\beta')}\, T\, W^+(t,0)\, a_n^+(t)\, W(t,0)\, W^+(t',0)\, a_m(t')\, W(t',0)\right\rangle}{\left\langle T_\beta\, e^{-\int_0^\beta d\beta' V(\beta')}\right\rangle}$$

a_n^+, a_n jetzt im WW Bild (so wie immer)

$$\left.\begin{aligned} W^+ &= T\, e^{+\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' V(t')} \\ W &= T\, e^{-\cdots} \end{aligned}\right\}$$ nach Umsetzen der Entwirrungsformel f. Exp.-Fkt.

eine bisher ungelöste Sache ist, daß

β und t sich um „i" unterscheiden

in den Exponenten → keine gemeinsame Achse f. Diagrammtechnik,

Dafür stellen wir uns vor, wir hätten von Anfang an $g_{nm}(\tau,\tau')$ betrachtet mit $\frac{it}{\hbar}=\tau$, $\frac{it'}{\hbar}=\tau'$

$$\Rightarrow \quad a \longrightarrow e^{\tau H}\, a\, e^{-\tau H}$$

$$W = e^{-\int_0^{\tau} d\tau'' V(\tau'')}$$

$$W^+ = e^{\int_0^{\tau} d\tau'' V(\tau'')}$$

Matsubara-Technik: rechnen mit imaginärer Zeit (formal)

$W(\tau',0)$

$$g_{nm}(\tau,\tau') = \frac{\left\langle T_\beta W(\beta,0)\, T\, \overbrace{W^+(\tau,0)\, a_n^+(\tau)\, \underline{\underline{W(\tau,0)\, W^+(\tau',0)}}\, a_m(\tau')}^{*} \right\rangle}{\left\langle T_\beta W(\beta,0)\right\rangle}$$

$$* = T e^{+\int_0^{\tau} d\tau'' V(\tau'')}\, a_n^+(\tau)\, e^{\underline{\underline{-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' V(\tau'')}}}\, a_m(\tau')\, e^{-\int_0^{\tau'} d\tau'' V(\tau'')}$$

$\tau > \tau''$ Zeitordnung über T

$$= T\, a_u^+(\tau)\, e^{\int_0^{\tau'} d\tau'' V(\tau'')}\, a_m(\tau')\, e^{-\int_0^{\tau'} d\tau'' V(\tau'')}$$

$$= T\, a_u^+(\tau)\, a_m(\tau')$$

$$\rho_{um}(\tau,\tau') = \frac{\langle T e^{-\int_0^{\beta} d\beta' V(\beta')}\, a_u^+(\tau)\, a_m(\tau') \rangle}{\langle T e^{-\int_0^{\beta} d\beta' V(\beta')} \rangle}$$

T ordnet β, und ordnet unabh. τ

Am Ende: $\tau \to \tau'$, $\frac{it}{\hbar} = \tau$,

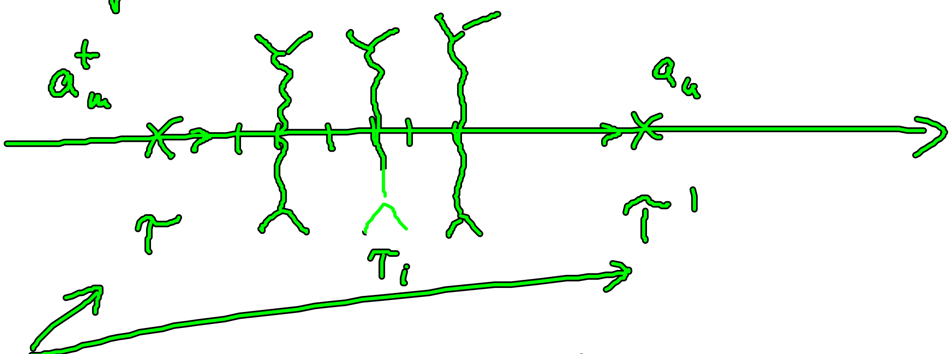
um die effektive Dichtematrix $\rho_{um}(t)$

für alle Observablen.

4.2. Verbundene Diagramme

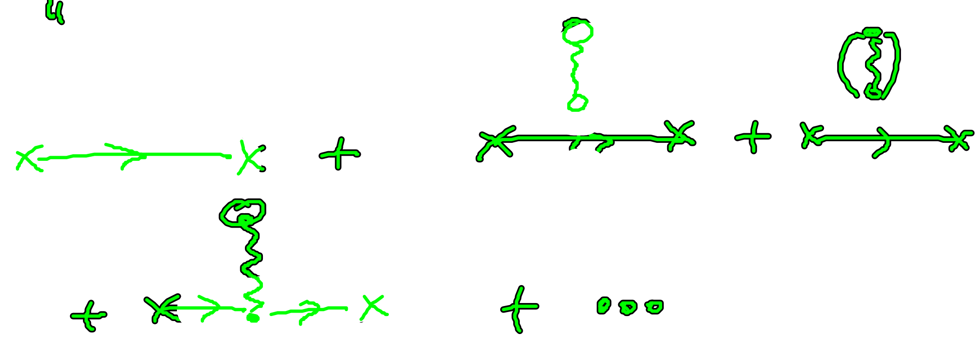
$$\rho_{nm}(\tau,\tau') = \frac{\sum_n \frac{1}{n!}\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \cdots \int_0^\beta d\tau_n \langle T\, V(\tau_1)\cdots V(\tau_n)\, a_m^+(\tau)\, a_n(\tau')\rangle}{\sum_n \frac{1}{n!}\int_0^\beta d\tau_1 \cdots \int_0^\beta d\tau_n \langle T\, V(\tau_1)\cdots V(\tau_n)\rangle}$$

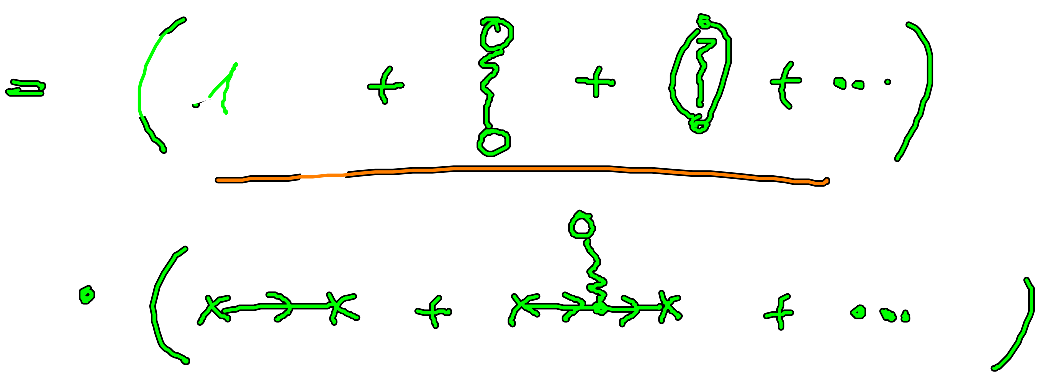
Diagrammtechnik Zähler :



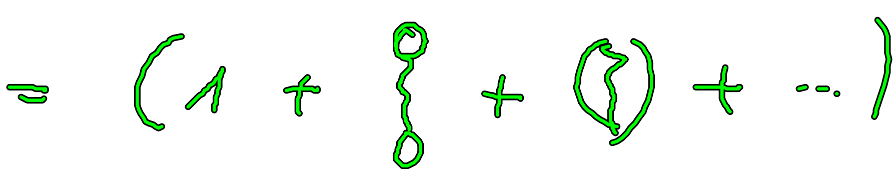
Zusätzlich 2 „externe" Zeitpunkte

Zähler :





Nenner =



$$\rho_{nm}(\tau,\tau') = \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^\beta d\tau_1 \cdots \int_0^\beta d\tau_n \underbrace{\langle T\, V(\tau_1) \ldots V(\tau_n)\, a_n^+(\tau) a_m(\tau') \rangle}_{\text{alle verbund. Diagramm}}$$

Die Beiträge sind nur von verbunden Diagrammen zu nehmen!

4.3. Diagrammregeln

um $\rho_{nm}(\tau,\tau')$ zu berechnen

a) male Diagramm n-ter Ordnung.

1.) mache 2 äußere Zeitpunkte × ×
und n WW Linien } auf der τ-Achse

2.) Konstruiere alle topologisch verschieden Diagramme
die verbunden sind

(Zu einem Diagramm gehören je $2^n n!$ topologisch
gleiche Diagramme: 2^n durch Umindizieren
$n!$ durch verschied. Zeitketten,
Zeitpunkttausch)

b) Diagramme in Formelsprache übersetzen

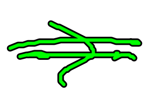
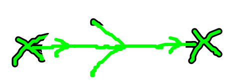
1.) jede WW-Linie wird in Matrixelement $V_{k_i l_i m_i n_i}$ umgeschrieben
($i \mathrel{\widehat{=}} \tau_i$)

2) für jede Fermionlinie wird G als Propagator genommen

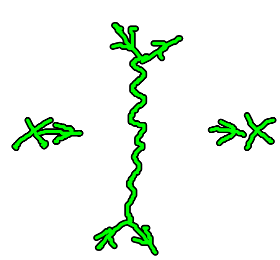
3) Loopregel!

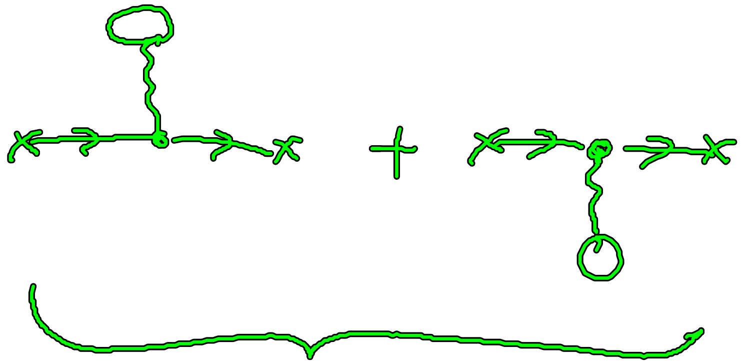
4) die $2^n n!$ identischen Diagramme canceln
die Faktoren $\left(\frac{1}{2} V_{klmn}\right)^n$ und $\frac{1}{n!}$ in der Summe

Beispiel


= 0.te Ordnung:  „freie Ausbreitung, eines Teilchens zwischen 2 Zeitpunkten"

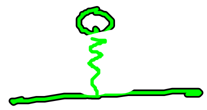
voller Propagator

1.te Ordnung: 

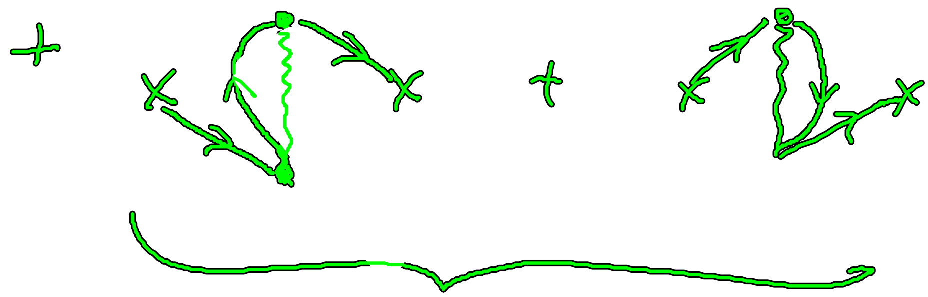


≙ 1.Familie

$2^1 \cdot 1! = \underline{2}$



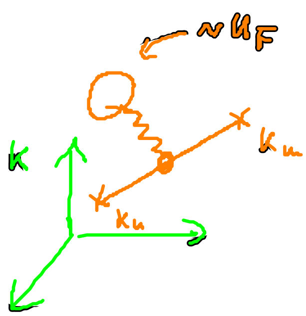
Stellvertretend f. beide oben



≙ 2.Familie

Interpretation im k Raum.

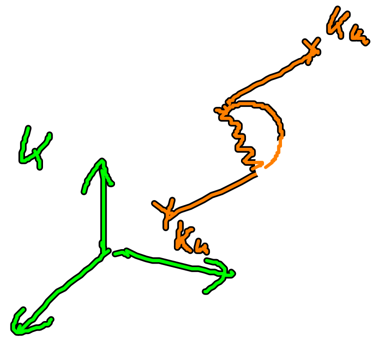
1. Familie



Elektron nimmt Weg in k-Raum,
unterwegs passiert was:
ein and. Elektr. wird
„vorstellen an Zustand
raus und reingelegt"

→ WW mit Ladungsdichte

2. Familie k



Hartree-Term

unterwegs tauschen die El. ihre Plätze im k-Raum

„Austauschterm"

„Fockterm"