<u>Wahrscheinlichkeit</u> $P(A): \mathcal{A} \to [0,1]$

$$P(A) \geq 0$$

$$P(S) = 1$$

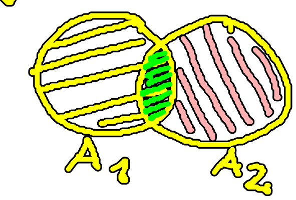
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für disjunkte Ereignisse
$(A \cap B = \emptyset)$

$\Rightarrow P(A) \leq 1$

Zerlegung beliebiger A_1, A_2 in disjunkte Ereignisse

(1) $A_1 \cup A_2 = \underline{A_1} + \underline{A_2 \cap \bar{A}_1}$

disjunkte Ereignisse



(2) $A_2 = \underline{(A_1 \cap A_2)} + \underline{(\bar{A}_1 \cap A_2)} = \underbrace{(A_1 \cup \bar{A}_1)}_{S} \cap A_2$

(1) $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2)$

(2) $\Rightarrow P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2)$

Also $P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$

(2) $\Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$ falls $A_1 \leq A_2$

<u>Bedingte Wahrscheinlichkeit</u>:

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wahrscheinl. für A unter der Bedingung, dass B eintreten ist

A_1 und A_2 heißen <u>unkorreliert</u>, falls

$$P(A_2 \mid A_1) = P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

NB $\Rightarrow P(A_1|A_2) = P(A_1)$

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable ist gegeben durch

(i) eine Menge M von vollständig disjunkten Ereignissen (sample set) X_i

(ii) Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X_i)$ über M

Es gilt die Normierung $\sum_i P(X_i) = 1$

Für eine kontinuierliche Menge ($x \in \mathbb{R}$) definiert

$$P(x' \leq x \leq x'+dx') = \rho(x')\,dx'$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte (Wahrscheinlichkeitsverteilung, probability distribution function pdf)

(Übergang zu diskreten Ereignissen:

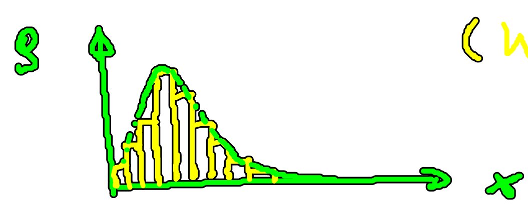
$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x - x^{(i)})\, P_i$$
)

Normierung: $\int_a^b dx\, \rho(x) = 1$

Phys. Interpretation

W. verteilung realisiert durch ein Ensemble von vielen äquivalenten Systemen, d.h. durch die Dichteverteilung $\rho(x)$ der Mitglieder des Ensembles mit Werten zwischen x und $x+dx$

(W. $\rho(x)dx$)



Verallgemeinerung auf d Zufallsvar.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

$d^d x = dx_1 dx_2 \ldots dx_d$

Normierung $\int d^d x \, \rho(x) = 1$

Mittelwert (Erwartungswert) einer Zufallsvar. x:

$$\langle x \rangle := \int d^d x \, \rho(x) \, x$$

Für bel. Funktion $\varphi(x)$:

$$\langle \varphi \rangle = \int d^d x \, \rho(x) \, \varphi(x)$$

NB: Der Mittelwert ist ein lin. Funktional $f_\rho : L \to \mathbb{R}$

$\varphi \mapsto \langle \varphi \rangle$

$$\langle c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle = c_1 \langle \varphi_1 \rangle + c_2 \langle \varphi_2 \rangle$$

$\varphi \in L$ geeign. Fkt.raum

Unkorrelierte Zufallsvariable:

x_1, x_2 heißen unkorreliert, falls $\boxed{\rho(x_1, x_2) = \rho_1(x_1) \rho_2(x_2)}$

Dann gilt: $\boxed{\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle}$

Beweis: $\int dx_1 dx_2 \, \rho(x_1, x_2) \, x_1 x_2 = \underbrace{\int dx_1 \rho_1(x_1) x_1}_{} \underbrace{\int dx_2 \rho_2(x_2) x_2}_{}$

Zusammenhang zwischen Wahrsch.verteilung und Mittelwerten:

ν-te Moment der Wahrscheinl.verteil. $M_\nu := \langle x^\nu \rangle$

Momentenerzeugende: $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} Z(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = M_\nu$$

Durch die Angabe aller Momente ist die Wahrsch. verteilung festgelegt!

Verallg. auf d Zufallsvar.:

$M_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_d} = \langle x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_d^{\nu_d} \rangle$ Momente der Ordnung $\nu := \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_d$

Momentenerzeug.: $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{\alpha_1^{\nu_1} \dots \alpha_d^{\nu_d}}{\nu_1! \dots \nu_d!} M_{\nu_1 \dots \nu_d}$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$$
$$x = (x_1, \dots, x_d)$$

Kumulante $C_{\nu_1 \dots \nu_d} = \langle x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_d^{\nu_d} \rangle_c$

ist definiert durch die

Kumulantenerzeugende $\Gamma(\alpha) = \ln \langle e^{\alpha x} \rangle$

$$\left(\frac{\partial^{\nu_1} \dots \partial^{\nu_d}}{\partial \alpha_1^{\nu_1} \dots \partial \alpha_d^{\nu_d}} \Gamma(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = C_{\nu_1 \dots \nu_d} \right) \qquad = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{\alpha_1^{\nu_1} \dots \alpha_d^{\nu_d}}{\nu_1! \dots \nu_d!} C_{\nu_1 \dots \nu_d}$$

Eigenschaft:

Kumulanten sind additiv für unkorrelierte Zufallsvariable.

(gilt nicht für Momente!)

Beweis: Seien x_1, x_2 unkorreliert $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\underline{x} = (x_1, x_2)$

$$\Rightarrow Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha}\,\underline{x}} \rangle = \int dx_1 dx_2\, g(x_1) g(x_2) e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2}$$

$$= \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

$$\Longrightarrow \Gamma(\underline{\alpha}) = \ln Z(\underline{\alpha}) = \underbrace{\ln \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle}_{\Gamma(\alpha_1)} + \underbrace{\ln \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle}_{\Gamma(\alpha_2)}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$:

$$\Gamma(\alpha, \alpha) = \ln \langle e^{\alpha \underbrace{(x_1 + x_2)}_{x}} \rangle = \sum_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \langle (x_1 + x_2)^\nu \rangle_c$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \langle x_1^\nu \rangle_c + \sum_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \langle x_2^\nu \rangle_c$$

$$\Longrightarrow \langle (x_1 + x_2)^\nu \rangle_c = \langle x_1^\nu \rangle_c + \langle x_2^\nu \rangle_c$$

<u>Fluktuation</u> $\quad \Delta x := x - \langle x \rangle$

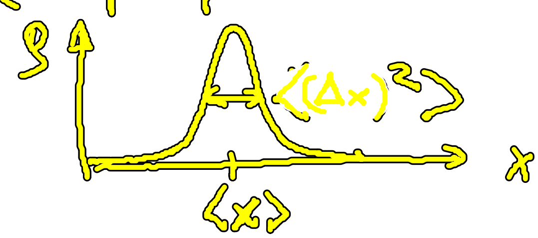
$$\Longrightarrow \quad \langle \Delta x \rangle = 0$$

<u>Varianz</u>: $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$

$$= \langle x^2 \rangle - 2 \langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2$$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

(Maß für die Breite der Verteilung)



<u>Korrelationsmatrix</u> (Kovarianzmatrix):

$$\langle \Delta x_k \Delta x_\ell \rangle = \langle x_k x_\ell \rangle - \langle x_k \rangle \langle x_\ell \rangle$$

Nichtdiagonalelemente verschwinden für unkorrelierte Zufallsvariable !