Wichtig! Bitte durchlesen, da Prüfungsrelevant.
→ Heute: Gekürzte Fassung

5.) Quantenmechanische Modellsysteme

Grenzen der klassischen Modelle:
→ tiefe Temp.
→ hohe Dichten
⇒ Quantenstatistik

5.1) Ununterscheidbarkeit quantenmechanischer Teilchen

N Teilchenzustand $|\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_N\rangle$
$\alpha_1 \to$ 1-Teilchen Quantenzahlen
Permutations Operator (OP):

$$\hat{P}_{ij} |\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_N\rangle = |\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_N\rangle$$

vertauscht

insbesondere gilt: $[A, \hat{P}_{ij}] = 0 \Rightarrow \hat{P}_{ij}$ Erhaltungsgröße

$$\hat{P}_{ij}^2 = 1 \quad \text{(Identität)}$$

$$\hat{P}_{ij} \leftrightarrow \psi \to \lambda \text{ ist Eigenwert}$$

$$\hat{P}_{ij}^2 \psi = \lambda_{ij}^2 \psi \Rightarrow \lambda_{ij}^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{ij} = \pm 1}$$

2 Teilchensystem:

NR: $\hat{P}_{12} |a, b\rangle_S = \frac{1}{2}(\hat{P}_{12} + 1) |a, b\rangle_S$

$$= \frac{1}{2}(\hat{P}_{12} + \hat{P}_{12}^2)\,|a,b\rangle_S$$

$$\Rightarrow \hat{P}_{12}\,|a,b\rangle_S = 1 \cdot |a,b\rangle_S$$

Symmetrisch: $|a,b\rangle_S := \frac{1}{2}(1 + \hat{P}_{12})\,|a,b\rangle_S$

Antisymmetrisch: $|a,b\rangle_a := \frac{1}{2}(1 - \hat{P}_{12})\,|a,b\rangle_a$

N-Teilchensystem:

$P_{ij} \leftrightarrow H$ kommutieren

$P_{ij} \leftrightarrow P_{kl}$ im allg. kommutieren sie nicht

komplizierte Symmetrieeigenschaften wird denkbar,
Tatsächlich wird in der Natur nur Zustände realisiert,
die bei Vertauschung beliebiger ununterscheidbaren
Teilchen symmetrisch ($\lambda_{ij} = +1$) oder
antisymmetrisch ($\lambda_{ij} = -1$) sind

$\Rightarrow$ Reduktion des Hilbertraums $\underbrace{\mathcal{H} \times \dots \times \mathcal{H}}_{N}$ auf
einen sym. ($\mathcal{H}_N^+$) und einen
antisym. ($\mathcal{H}_N^-$) Teilraum erlaubter Zustände

	Bosonen	Fermionen
Zustände	symm.	antisymm.
Spin	ganzzahlig $s = 0, 1, 2 \ldots$	halbzahlig $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$
Statistik	Bose-Einstein	Fermi-Dirac
Hilbertraum	$\mathcal{H}_N^+ = \hat{S}\,\mathcal{H}_N = \frac{1}{N!}\sum_{\wp}^{N} P_\wp \mathcal{H}_N$	$\mathcal{H}_N^- = \hat{A}\,\mathcal{H}_N = \frac{1}{N!}\sum_{\wp=1}^{N} (-1)^{\wp} \hat{P}_\wp \mathcal{H}_N$
Besetzungszahl N_j	$0, 1, 2, \ldots$	$0, 1$

Pauli-Prinzip:

- Wellenfkt total antisymm.

→ 2 identische Fermionen können sich nicht im gleichen Ein-Teilchenzustand befinden.

5.2 Das ideale Fermigas (kurz)

1-Teilchenzustände = Eigenzustände zur 1 Teilchen-Energie E_i

großkanonischer statistischer OP:

$$\hat{\rho} = \Xi^{-1} \exp -\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})$$

großkanonische Zustandssumme:

$$\Xi = \sum_{N_1 \ldots N_\ell} \exp\left\{-\beta \sum_{j=1}^{\ell} (E_j - \mu) N_j\right\}$$

$$= \prod_{j=1}^{\ell} \left[\sum_{N_j} \underbrace{\exp -\beta(E_j - \mu)}_{t_j := \exp\beta(\mu - E_j)} N_j \right]$$

Fermionen $\to 0, 1$

$$= \prod_{j=1}^{\ell} \left[\sum_{N_j=0}^{1} t_j^{N_j} \right] = \prod_{j=1}^{\ell} \left[1 + t_j \right]$$

$$\Rightarrow P(N_1 \cdots N_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} \frac{t_j^{N_j}}{1 + t_j} = \prod_{j=1}^{\ell} p(N_j) \quad \text{(Verteilung)}$$

Mittlere Besetzungszahl im 1-Teilchen Zustand E_j

$$p(N_j) = \exp(\psi_j - \beta E_j - \alpha N_j)$$

$$\psi_j = -\ln \Xi_j = -\ln(1 + t_j)$$

$\alpha = -\beta\mu$

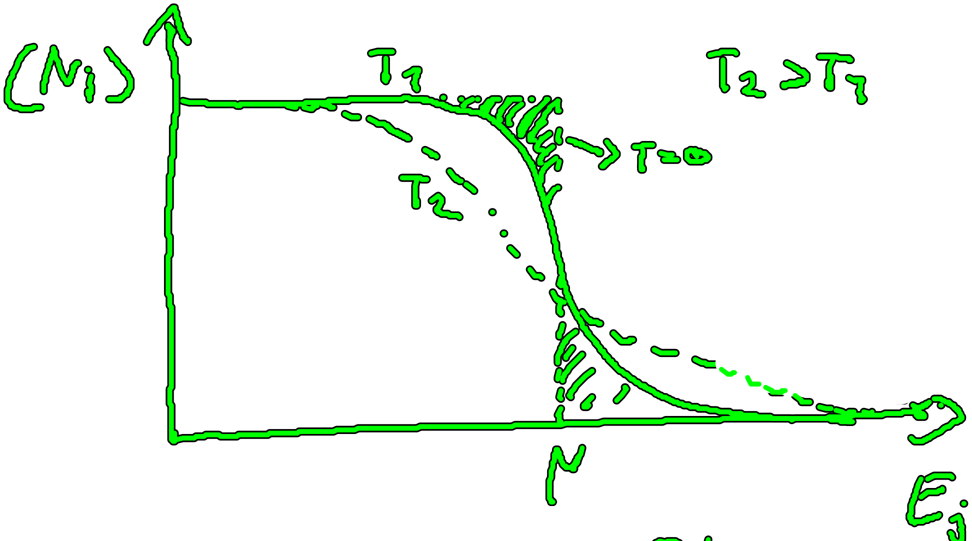
$+(\mu)$

$$\langle N_j \rangle = \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi_j$$

$$= \frac{t_j}{1 + t_j} = \frac{1}{t_j^{-1} + 1}$$

$$\boxed{\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_j - \mu}{kT}\right) + 1}}$$

Fermi-Verteilung



$T \to 0$: $\langle N_j \rangle \to \Theta[\mu - E_j]$ Stufenfkt

$T > 0$: „Aufweichungszone" bei $E_j \approx \mu$

$E_j - \mu \gg kT$ (hohe Energien):

$$\langle N_j \rangle \approx \exp\left[-\frac{E_j - \mu}{kT}\right]$$

→ klassischer Grenzfall

→ Maxwell-Boltzmann Verteilung

Energie und Zustandsdichte freier Teilchen

(kurz) Skizze:

- zyklische Randbed.
- Energieeigenwerte $E_j = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$
- großes V → Quasikontinuum $\sum \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k$
- Term für Spinentartung: $(2s+1)$ fach

großkanonische Zustandssumme

$$kT \ln \Xi = kT \sum_j \ln\left[1 + z\, e^{-\beta E_j}\right] \qquad z = e^{\beta\mu}$$

→ Fugazität

... Integration

$\rightarrow$ Fermi-Verteilung

$$\Rightarrow \quad \boxed{pV = kT \ln \Xi = \frac{2}{3} U}$$

Bemerkung:

1.) Gilt auch für klassische ideale Gase

$pV = NkT$ thermisch

$U = \frac{3}{2} NkT$ kalorisch

2.) Gilt ebenfalls für das Bose-Gas (morgen)

$\rightarrow$ unabh. von der speziellen Statistik

Ausgelassen: Entartetes Fermigas

Nichtentartetes Fermigas:

Voraussetzung: $\boxed{z = e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1}$ d.h. $\mu < 0$

Entwicklung der Fermi-Dirac-Integrale nach Potenzen von z (Fugazität)

$$F_s(\eta) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy \, \frac{y^s}{e^{y-\eta}+1} \ \ldots$$

$$= e^{\frac{\mu}{kT}} \Big[1 - \underbrace{\frac{1}{2^{s+1}} e^{\frac{\mu}{kT}}}_{\text{Quantenkorrekturen}} \Big]$$

Boltzmann Limit

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2mkT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} f_{1/2}(\eta)$$

$$\approx V N_c e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 - \frac{1}{2^{3/2}} e^{\frac{\mu}{kT}}\right]$$

$$N_c := (2s+1)\left(\frac{2\pi m kT}{h^2}\right)^{3/2} \quad \text{Entartungskonz.}$$

vollständige Nichtentartung

$$\frac{\bar{N}}{V} \approx N_c e^{\frac{\mu}{kT}}$$

$\rightarrow$ klassische Maxwell-Boltzmann

$$U \approx \frac{3}{2} kT V N_c e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} e^{\frac{\mu}{kT}}\right]$$

$\rightarrow$ Näherungen

0. Näherung $\quad \bar{N} = V N_c\, e^{\frac{\mu}{kT}}$

1. Näherung $\quad \bar{N} = V N_c\, e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 - 2^{-3/2} \frac{\bar{N}}{V N_c}\right]$

$$\Rightarrow \quad U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c}\right] \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c}\right]$$

$$\boxed{U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \underbrace{\frac{\bar{N}}{V N_c(T)}}_{\text{Quantenkorrektur}}\right]}$$

$\rightarrow$ kalorische Zustandsgleichung

$$\boxed{pV = \frac{2}{3} U = kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)}\right]}$$

$\rightarrow$ thermische Zustandsgleichung

$$pV = \underbrace{RT\Big[1}_{\text{klassische ideale Gas}} + \underbrace{\frac{1}{2^{5/2}} \frac{N_A}{V N_c(T)}\Big]}_{\text{Fermi-Abstoßung (erhöhter Druck)}}$$