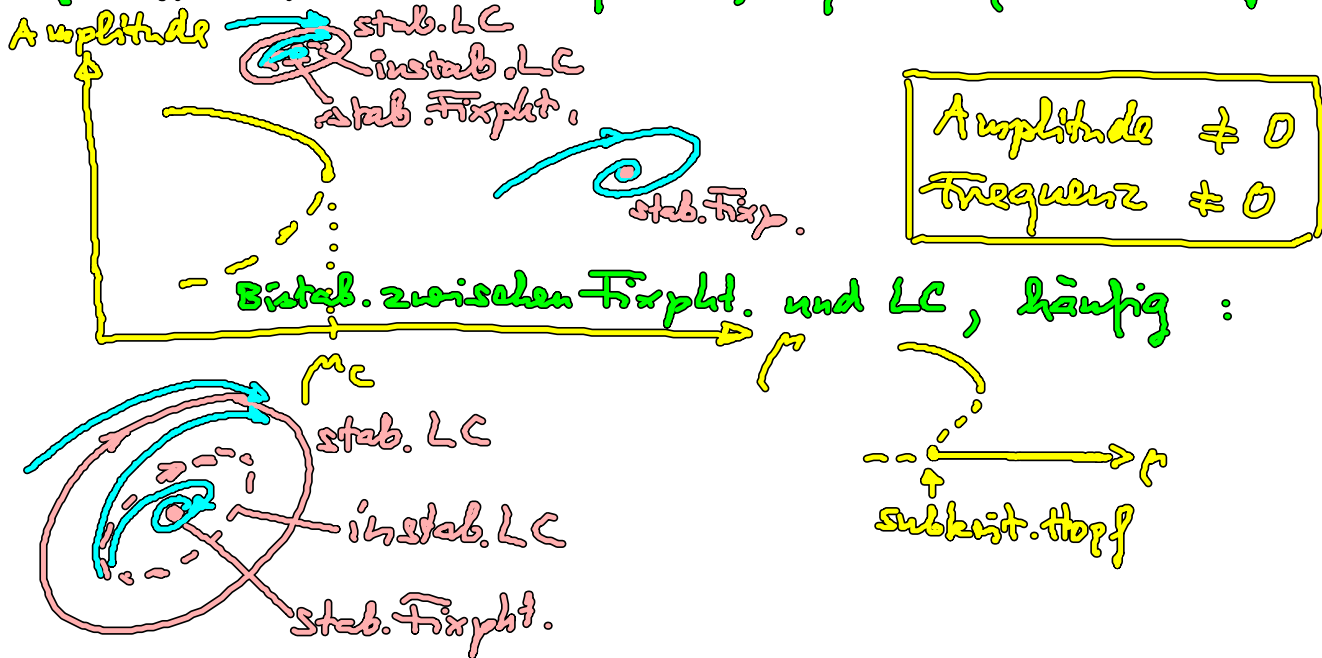


(C) Lokale Bifurkation von Grenzzyklen

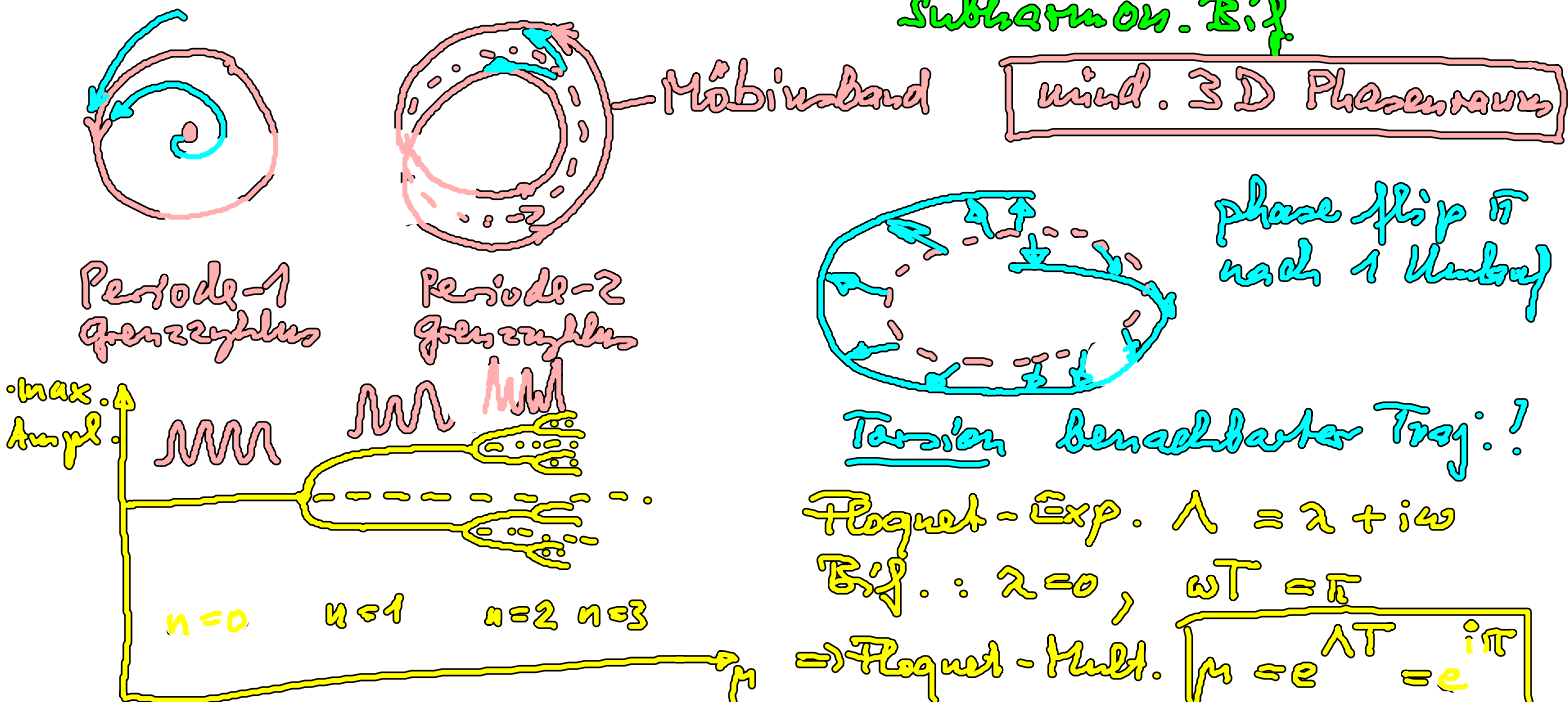
Startpunkt jetzt: Grenzzyklus, nicht Fixpt.
keine einfache lin. Stabilitätsanalyse

(C1) Sattel-Knoten-Bifurkation eines Grenzzyklus

(Kondensation von Pfaden, fold bifurcation of LC)



(C2) Perioden-Verdopplung (flip-Bifurkation, Subharmon. Bif.)

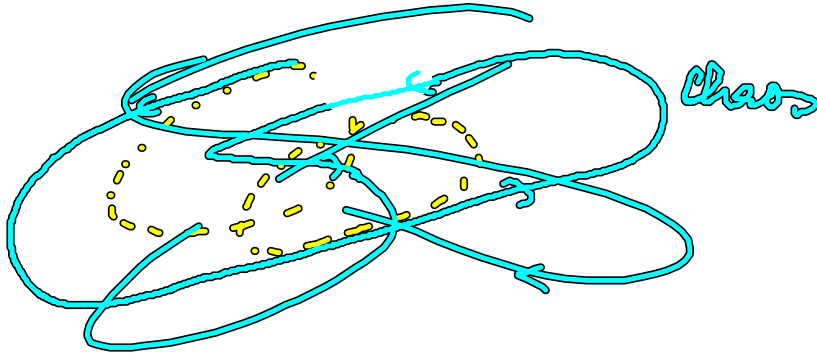


T 2T 4T ... 2ⁿT

= -1

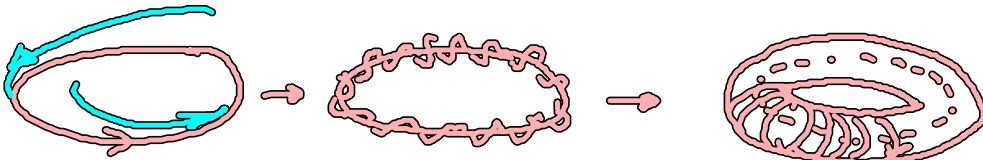
häufig Periodenverdopplungskaskade → Chaos
(Feigenbaum-Szenario)

→ unendlich viele instabile period. Orbits der Perioden 2ⁿT
(n=0, 1, 2, ...)



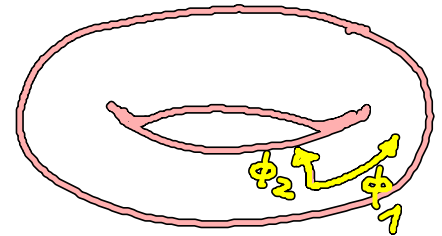
(C3) Sacker-Neimark-Bifurkation

(Sekundäre Hopf-Bif. eines Grenzzyklus)



1. Hopf-Bif. des Fixpunktes : $\phi_1 = \omega_1 t$
2. Hopf-Bif. des LC : $\phi_2 = \omega_2 t$

LC → 2-Torus



mind. 3D Phasenraum

inkommensurable Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$
(quasiperiodisch) irrational

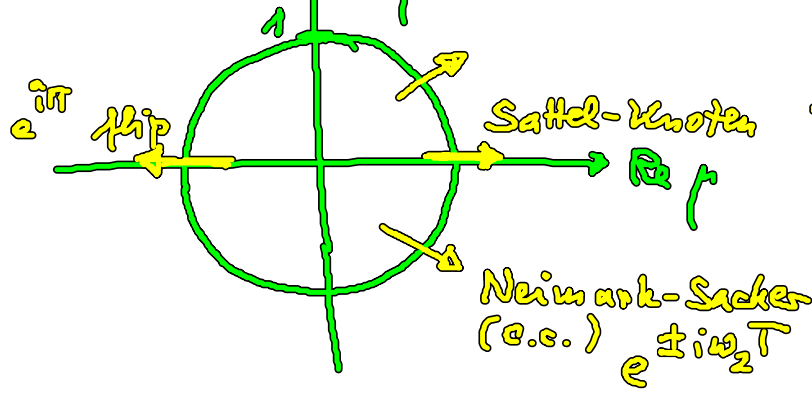
→ Trajektorie schließt sich nicht, liegt dicht auf dem Torus

falls $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ geschlossener Orbit = LC
(frequency locking)
Modenhopping

Instabilität von Grenzzyklen : Floquet-Multiplikatoren

$\Delta \ln \mu$

$\mu = e^{\Delta T}$

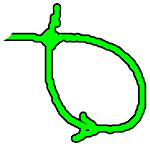


Stab.grenze $|\mu| = 1$
oder transit.

(D) globale Bifurkation von Grenzzyklen

globale qualitative Änderung des Phasenports,

z.B.



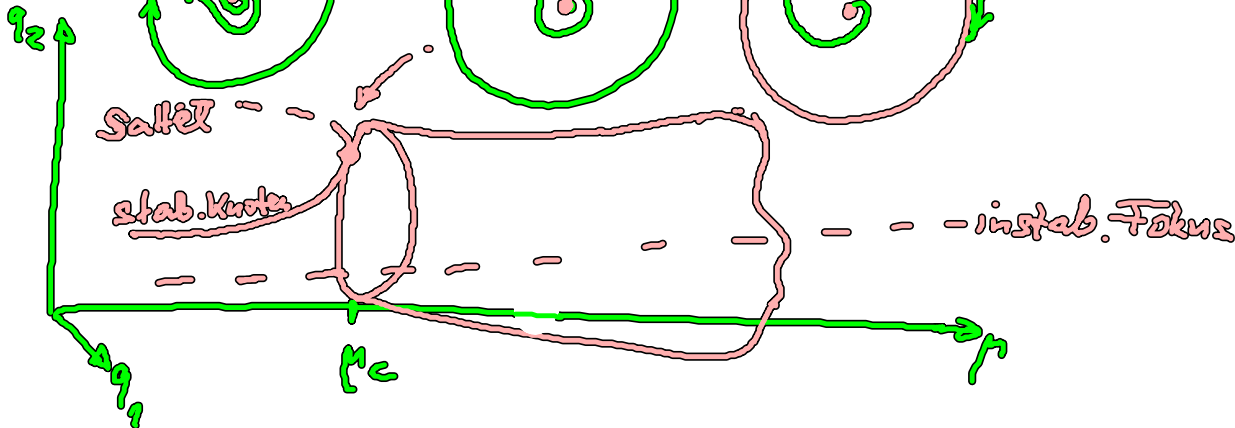
homclin. Orbit



kein loop

invar. Mannigfaltigk.
des Sattelpunkts.

(D1)

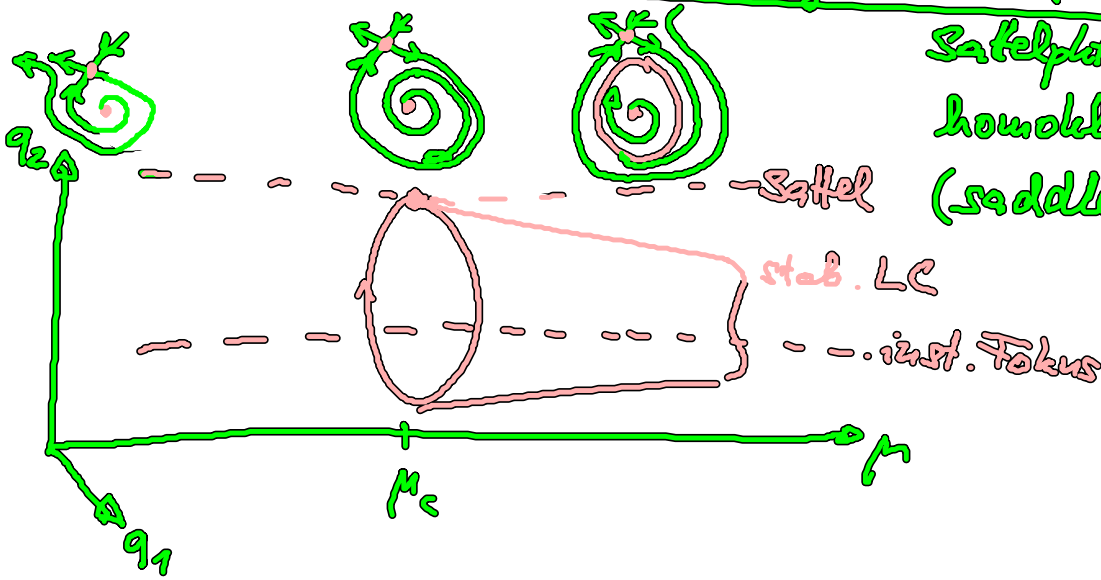


(D1) Sattel-Knoten-Bif. auf einem Grenzzyklus (Omega erbst)

saddle-node infinite period (SNIPER)
saddle-node on invariant cycle (SNIC)

Amplitude $\neq 0$
Frequ. $\rightarrow 0$

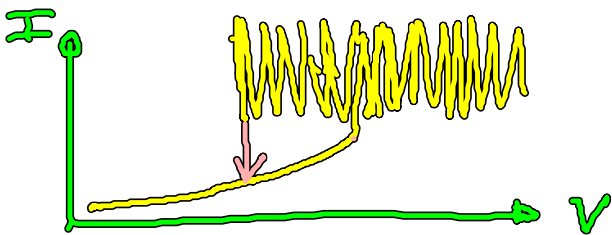
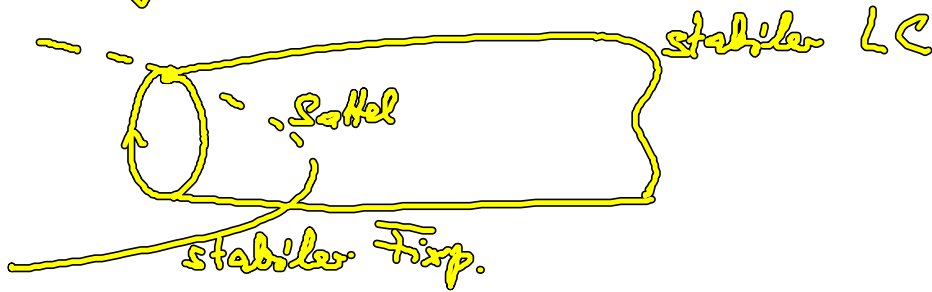
(D2) Homokline Bif. (blue-sky catastrophe)



Sattelpt. kollidiert mit LC:
homokliner Orbit
(saddle-to-saddle loop)

Ampl. $\neq 0$
Frequ. $\rightarrow 0$

häufig Bistab. zwischen Orz. u. Fixpkt., z.B.



Einfaches generisches Modell für SNIPER

(Ditzinger, Ning, Hu: PRL 50, 3508 (94)
Hu, Ditzinger, Ning, Haken: PRL 71, 87 (93)
Hizanidis, Anast, Schöfl; Int. J. Bif. Chaos 18, 1759 (08)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) - x(x-b) \end{aligned}$$

in Polarkoordin. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r^2) \\ \dot{\varphi} &= b - r \cos \varphi \end{aligned} \right\} b > 0 \quad \begin{pmatrix} \delta \dot{r} \\ \delta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3r^2 & 0 \\ -\cos \varphi & r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Fixpunkte: $r = 0$ (immer instab. Fokus, \dot{r})

$$r=1, b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arccos b \quad (b < 1)$$

für $b > 1$: LC mit $r=1, \dot{\varphi} = b - \cos \varphi > 0 \quad \forall \varphi$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 1}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b - \cos \varphi} = \int_0^T dt = T$$

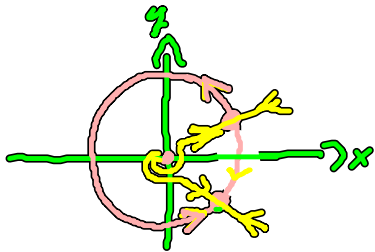
Bif. pkt.: $b = 1 \Rightarrow T \rightarrow \infty$ (Frequ. $\rightarrow 0$)

Fixpunkte auf dem Kreis $r=1$:

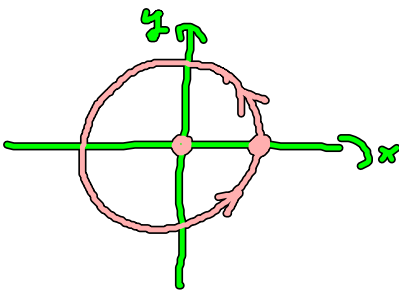
$$(x^*, y^*) = (b, +\sqrt{1-b^2}) \text{ Sattelpkt. } (\lambda = \left\{ \begin{matrix} -2 \\ \sqrt{1-b^2} \end{matrix} \right\})$$

$$= (b, -\sqrt{1-b^2}) \text{ stab. Kn. } (\lambda = \left\{ \begin{matrix} -2 \\ -\sqrt{1-b^2} \end{matrix} \right\})$$

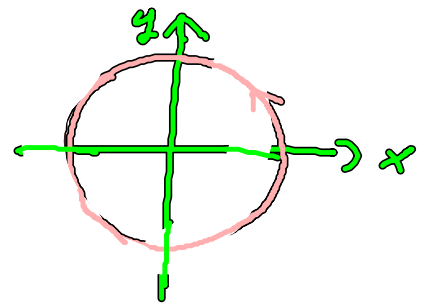
Sattel-Knoten-Bif.: $b = 1$



$b < 1$



$b = 1$



$b > 1$

(Anregbarkeit Typ I)

(E) Bifurkation von räumlichen Mustern

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{q}(x,t) = \underline{F}(\underline{q}, \mu) + D \Delta \underline{q}$$

Diff.konst. D

Lineare Stab. Eq $\sim e^{\lambda t} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}$
der Fixpunkte. (räuml. homogen)

\Rightarrow Dispersionsrel. $\lambda(\underline{k})$

$\Rightarrow \text{Re } \lambda(\underline{k}) < 0$ stabil
 > 0 instabil

$= 0$ Bif. von räumlich-period. Lösungen
mit Wellenvektor \underline{k}