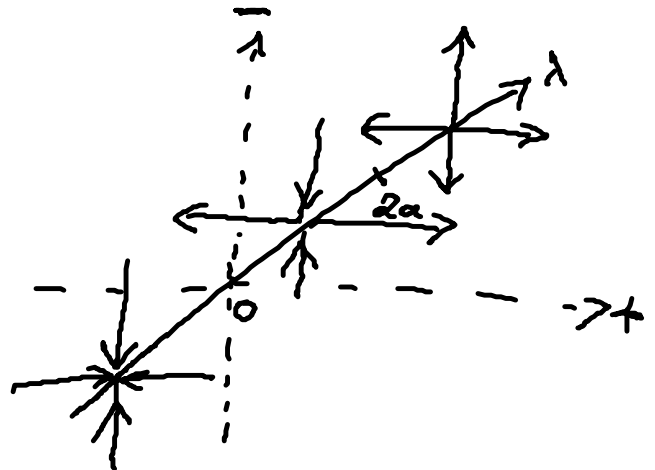
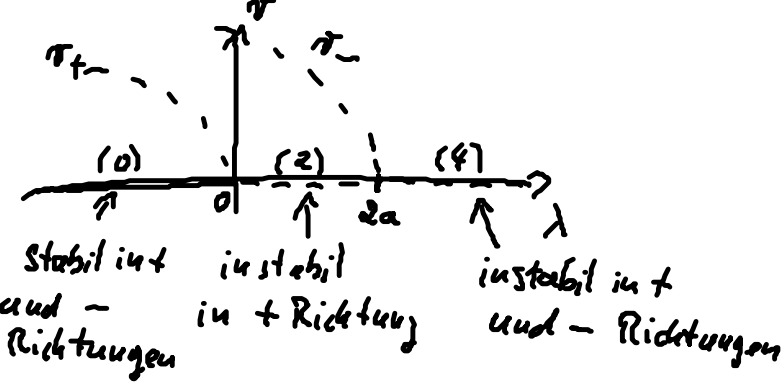


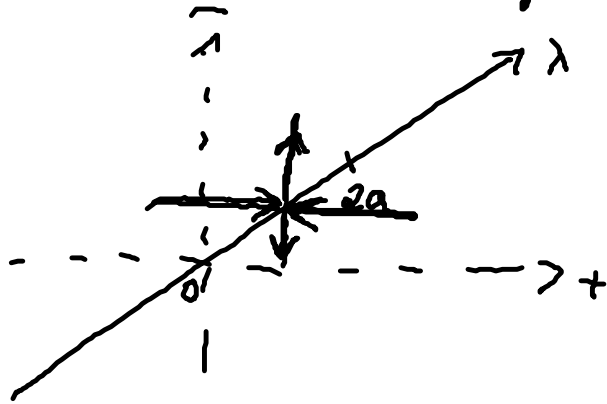
Nachtzug zu „2 gekoppelte Hopf-Normalformen“

ohne Kontrolle;

alternatives Bild

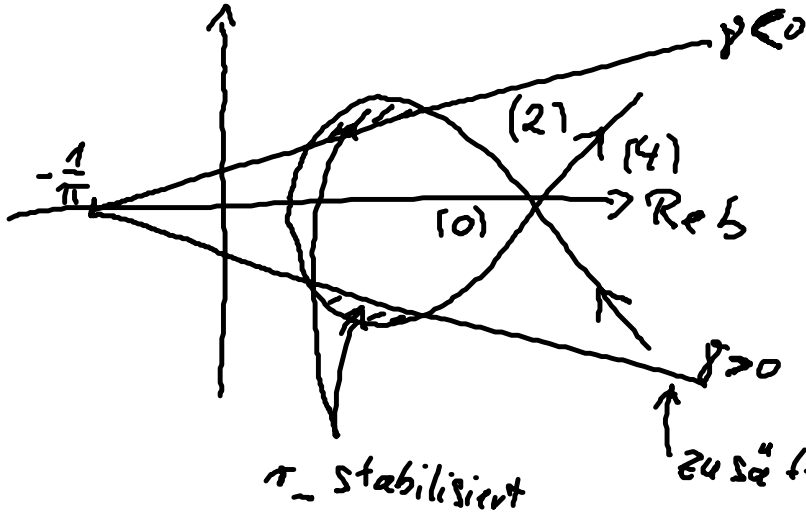


Ziel für Stabilisierung von r_- Orbit:



Stabilität des FP soll umgekehrt werden

Zurück zum $(\text{Re } b, \text{Im } b)$ -Bild bei $\lambda = 2a$, $\tau = \frac{p}{2\lambda} = \pi = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{1 - (\lambda - 2a)}$

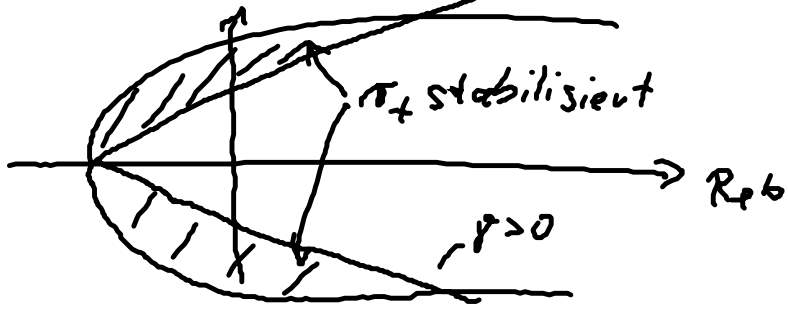


$\lambda = 2a$
 (0), (2), (4): instabile Dimensionen des Fixpunkts

zusaetzliche Bedingungen, damit - Richtung instabil wird

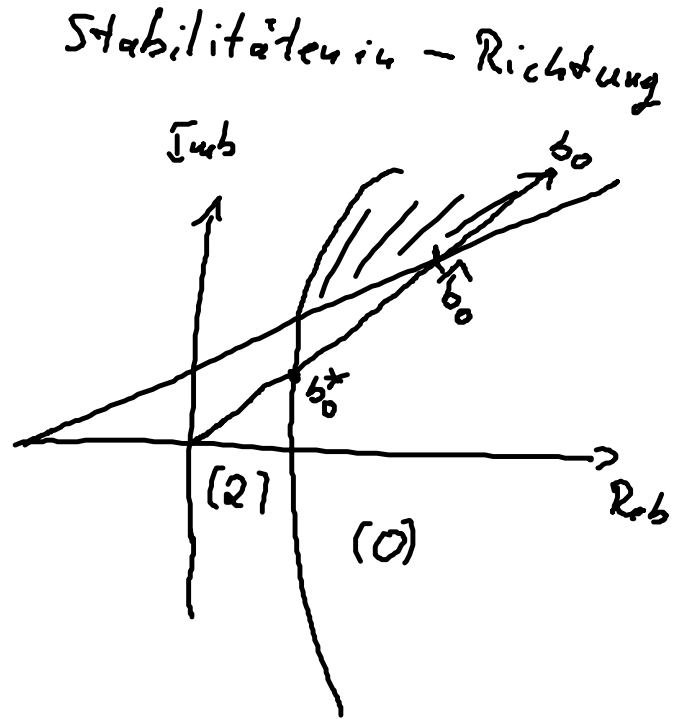
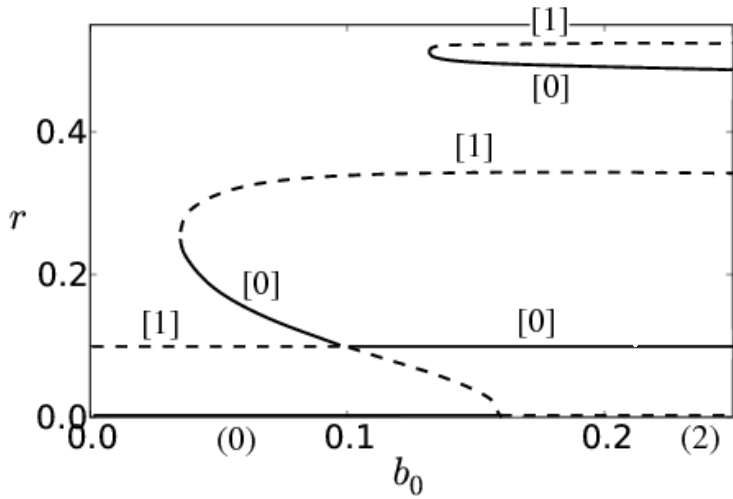
Vgl.: Stabilisierung des π_+ -Orbits (\cong 1 Hopf bifurkation)

$$\lambda = 0, \tau = P_+ = 2\pi = \frac{2\pi}{\tau - \lambda \delta} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \gamma < 0 \end{array} \right.$$

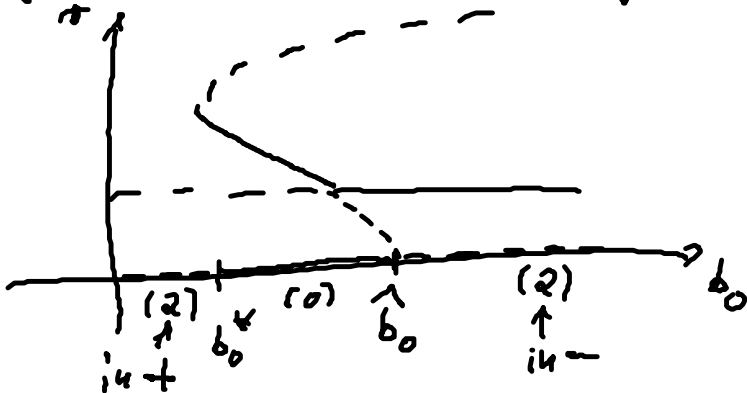


s. a. Kap 3.2.2

Zurück zum π_- -Orbit bei $\lambda = 2a = 0.01, b = b_0 e^{i\frac{\pi}{\delta}}, a = 0.$
 $\gamma = -10$



eigentlich (mit allen Richtungen)



4.2 Netzwerke

Ausgehend Kap 4.1 betrachten wir folgende Erweiterung von gekoppelten Hopf-Normalformen:

$$\dot{z}_j = \left(\lambda + i + (1 + i\beta) |z_j|^2 \right) z_j + \nabla \sum_{n=1}^N a_{jn} (z_n(1-\tau) - z_j(1))$$

mit Kopplungsstärke $\nabla = k e^{i\beta} \in \mathbb{C}$

und Kopplungsmatrix (a_{jn})

Lit.: C.-U. Choe et al. PRE 81, 025205 (R) (2010)

Fragen: (i) Stabilität des synchronen Zustands
(ii) Kontrolle anderer Zustände (über geschickte Wahl von β)

(i) Stabilität des synchronen Zustands:

allgemeine Notation für spezielle Zustände:

$$z_j = \tau_j e^{i\varphi_j}$$

Ann.: gleiche Amplitude: $\tau_j = \tau_{0,m}$

fest/vorgegebene

Phasendifferenzen: $\varphi_j = \Omega_m t + j \Delta \Omega_m$

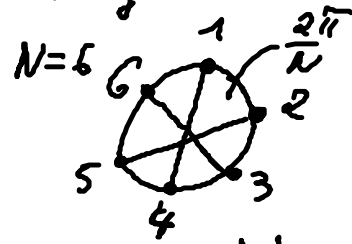
Rolle von Zählindex m :

$m=0$: gleichphasiger Zustand: $\tau_j \equiv \tau_{0,0}$, $\varphi_j = \Omega_0 t$

$m=1$: „Splay“-Zustand
(ausgedehnt)

$\tau_j = \tau_{j,1}$, $\varphi_j = \Omega_1 t + j \frac{2\pi}{N}$

$m > 1$: andere Cluster-Zustände

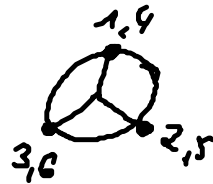


d_c = kleinstes gemeinsames Vielfaches von m und N geteilt durch m
 \Rightarrow Cluster-Zahl

Bsp.: $N=6$, $m=1 \Rightarrow d_c = 6$

$m=2 \Rightarrow d_c = 3$

\vdots



in Amplitude und Phase lauten die Bestimmungsgleichungen für diese invariablen Zustände ($\dot{\tau}_j = 0$, $\dot{\varphi}_j = \Omega_m$):

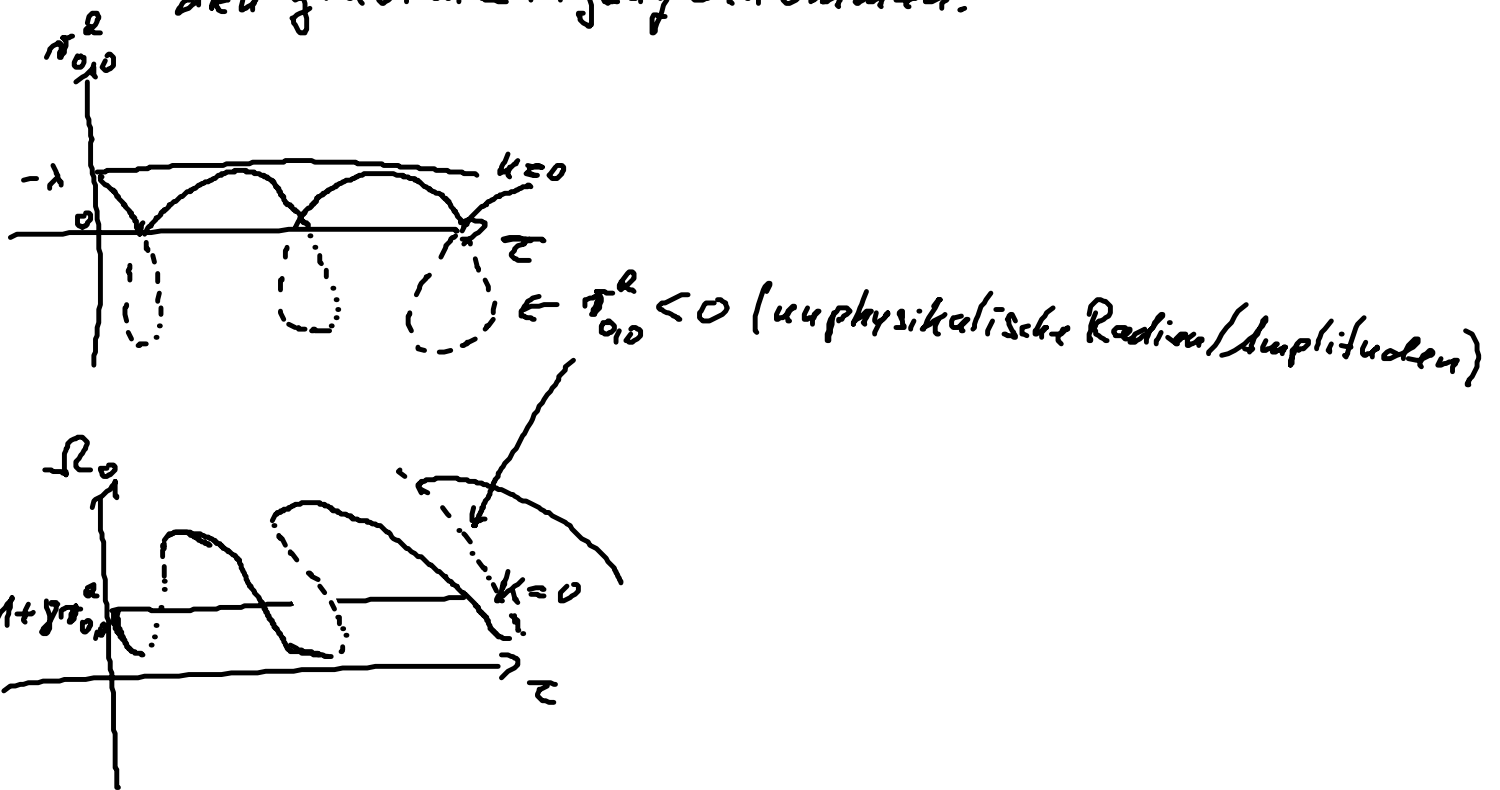
$$\tau_{0,m}^2 = - \left[\lambda - \sum_n a_{jn} k \cos \beta + k \sum_{n=1}^N a_{jn} \cos(\beta - \Omega_m \tau + (n-j) \Delta R_n) \right]$$

$$\Omega_m = 1 + \gamma \tau_{0,m}^2 - \sum_n a_{jn} k \sin \beta + k \sum_n a_{jn} \sin(\beta - \Omega_m \tau + (n-j) \Delta R_n)$$

NB: Betrachte konstante Zeilensumme der Kopplungsmatrix, d.h.,

$$\sum_n a_{jn} = \text{const.}, \text{ damit im synchronen Zustand alle Elemente}$$

den gleichen Ein gang bekommen.



Strategie zur Analyse der Stabilität des synchronen Zustands: Master Stability Function

basierend auf: L.M. Pecora, T.L. Carroll PRL 80, 2109 (1998)

Schematischer Ablauf:

Netzwerk/gekoppelte Systeme

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{f}(\underline{x}_i) + \nu \sum_j G_{ij} \underline{H} \underline{x}_j$$

Topologie des NW
 Eigenwerte der Kopplungsmatrix \underline{G} : $\underline{\nu}$

Lokale Dynamik (Abweichung vom sync. Zustand)

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{Df} \underline{\xi} + \nu \underline{H} \underline{\xi}$$

Stabilität der sync. Mannigfaltigkeit

Lyapunov-Exponenten $\Lambda(\nu)$

entscheidendes Kriterium: $\Lambda(\nu_k) < 0$ für alle Eigenwerte von \underline{G} , d.h., ν_k mit $k=1, 2, \dots, N$

Analoges Vorgehen ist möglich für diskrete Abbildungen.

→ Aufgabe 11

Untersuchbare, synchrone Zustände können sowohl periodisch (s.u.) als auch chaotisch sein.

in Formeln:

(a) $\dot{\underline{x}}_i = \underline{f}(\underline{x}_i) + \nabla \sum_{j=1}^N G_{ij} \underline{H} \underline{x}_j \in \mathbb{R}^n$ (einzelnes Element)

(b) $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) + \nabla (\underline{G} \otimes \underline{H}) \underline{x} \in \mathbb{R}^{nN}$ (komplettes Netzwerk)

(c) Linearisierung um den synchronen Zustand $\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{x}_{\text{sync}} \in \mathbb{R}^{nN}$

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{DF}(\underline{x}_{\text{sync}}) \underline{\xi} + \nabla (\underline{G} \otimes \underline{H}) \underline{\xi}$$

(d) Diagonalisierung von Kopplungsmatrix \underline{G} (Ann.: $\sum_j G_{ij} = \text{const.}$)

$$\dot{\underline{\xi}}_i = \underline{DF}(\underline{x}_{\text{sync}}) \underline{\xi}_i + \nu_k \underline{H} \underline{\xi}_i \in \mathbb{R}^n, \underline{\xi}_1 = \dots = \underline{\xi}_N$$

für Eigenwerte ν_k mit $k=1, \dots, N$

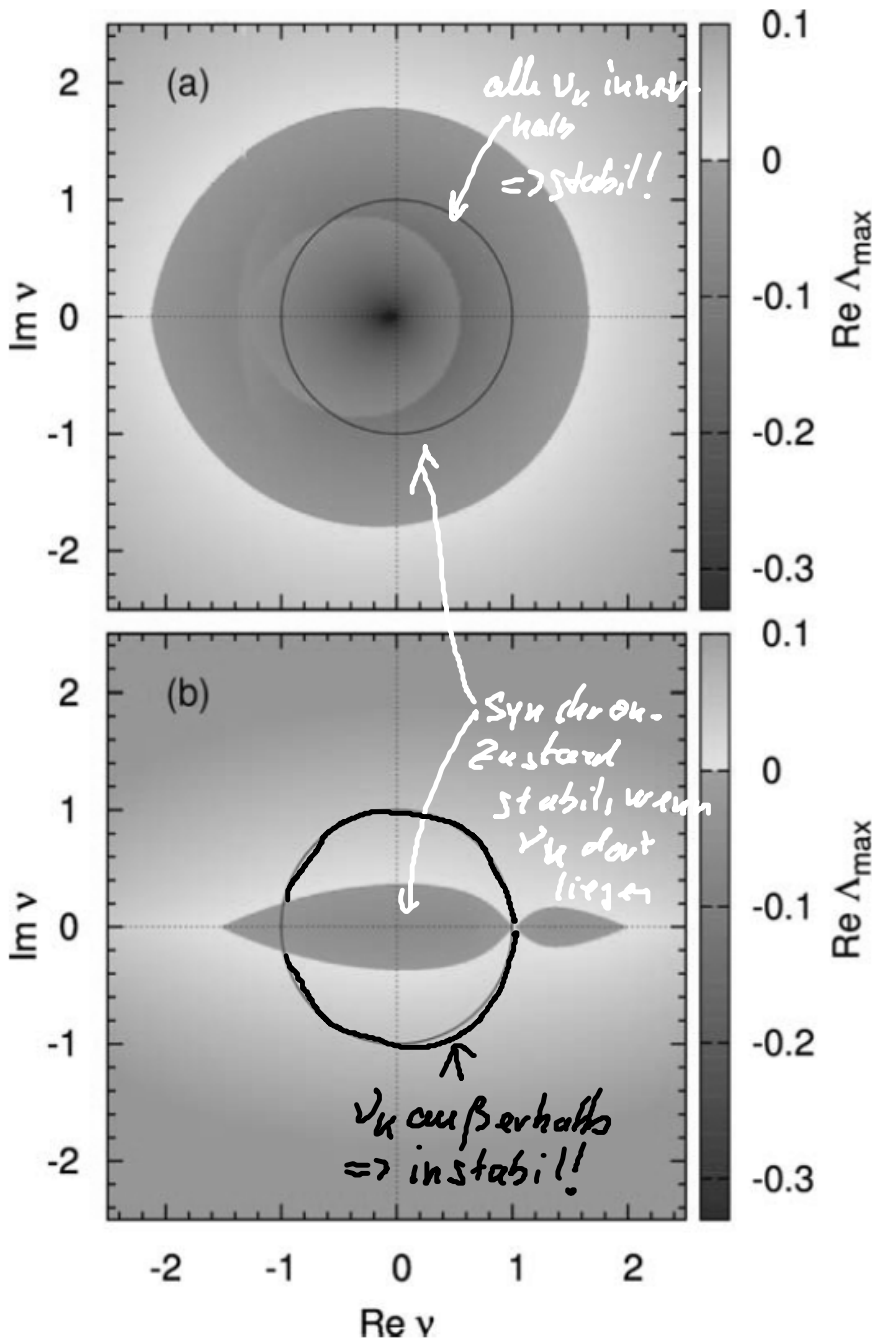
(e) Verwende $\nu = \text{Re } \nu + i \text{Im } \nu$ als Parameter und

Berechne Lyapunov-Exponenten

(f) Test, ob $\lambda(\nu_k) < 0$ für alle ν_k von gegebenem \underline{G}
für Stabilität der synchronen Lösung

NB: analoges Vorgehen für Systeme mit Zeitverzögerungen
in der Kopplung \Rightarrow statt $\underline{x}_i, \underline{x}, \underline{\xi}, \underline{\xi}_i$ im Kopplungsterm
erhält man dann $\underline{x}_i(t-\tau), \underline{x}(t-\tau), \underline{\xi}(t-\tau), \underline{\xi}_i(t-\tau)$

an obigen Bsp erhalten wir für $\alpha=0.1, \gamma=0, \beta=0$



$$k \sum_n a_{jn} = 0.3, \tau = 2\pi$$

Kreise: unidirektionaler Ring

$$\nu_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$$

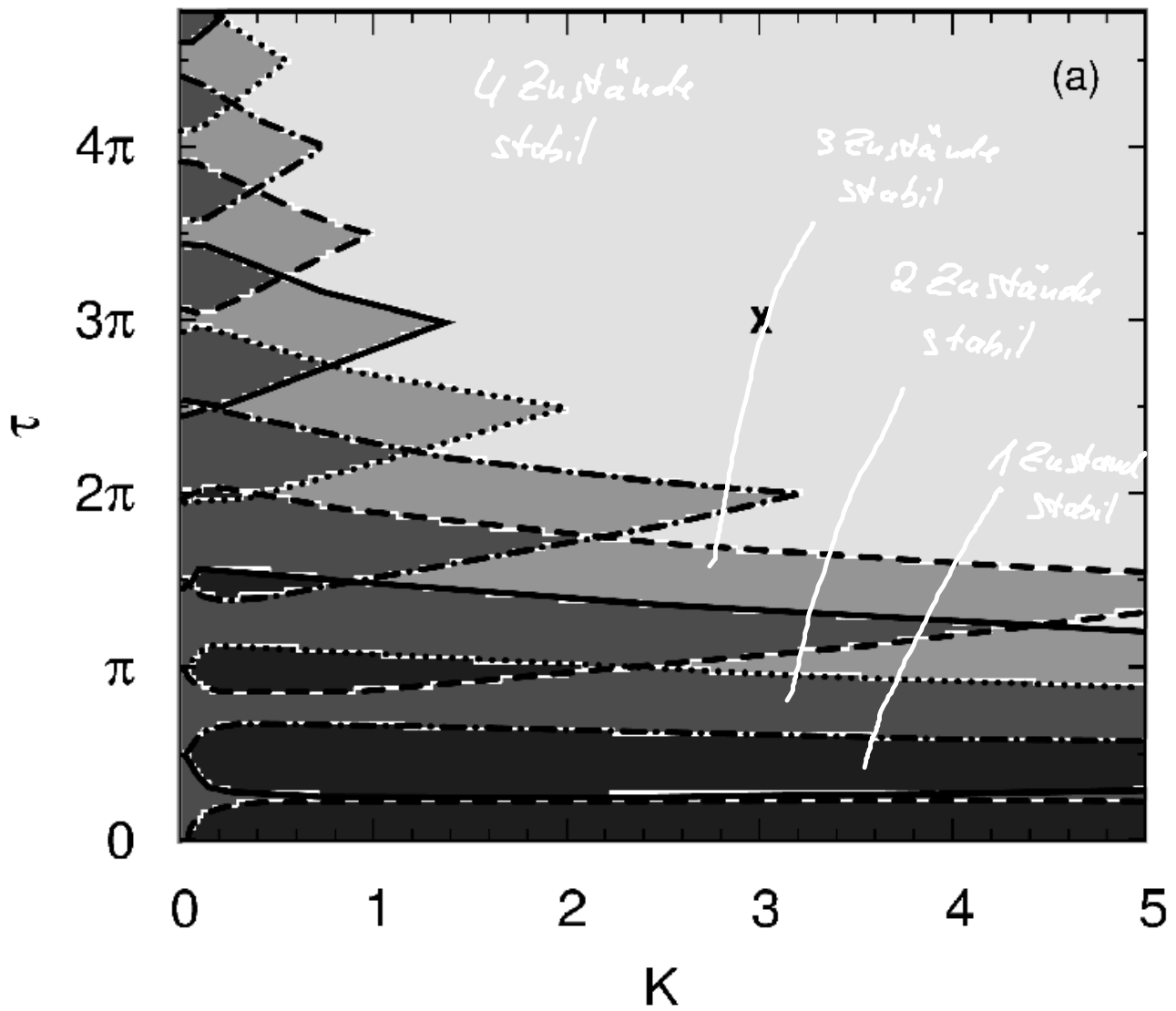
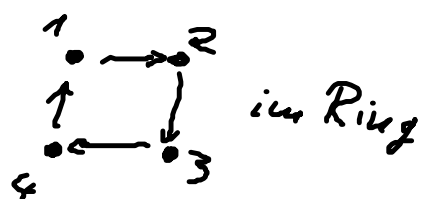
liegen auf Einheitskreis

$$k \sum_n a_{jn} = 0.08, \tau = 0.52\pi$$

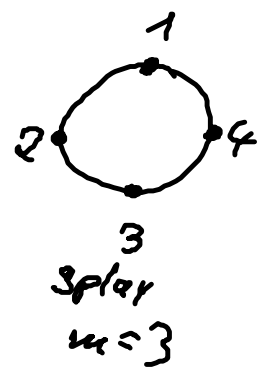
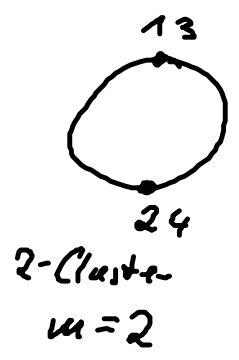
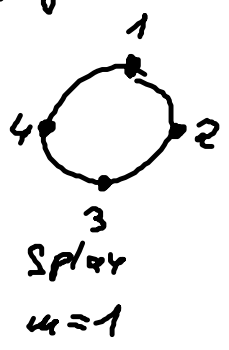
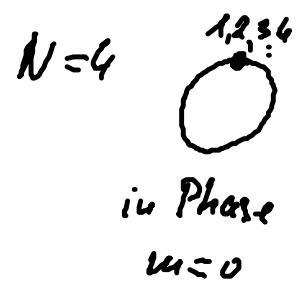
Fazit: Kosten Stability Function gibt Auskunft über die Stabilität des synchronen Zustands.

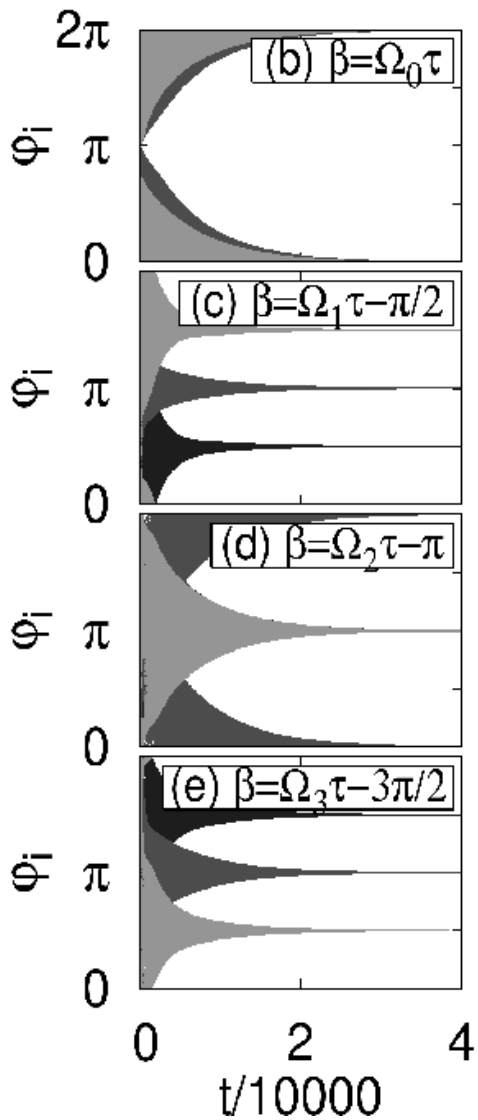
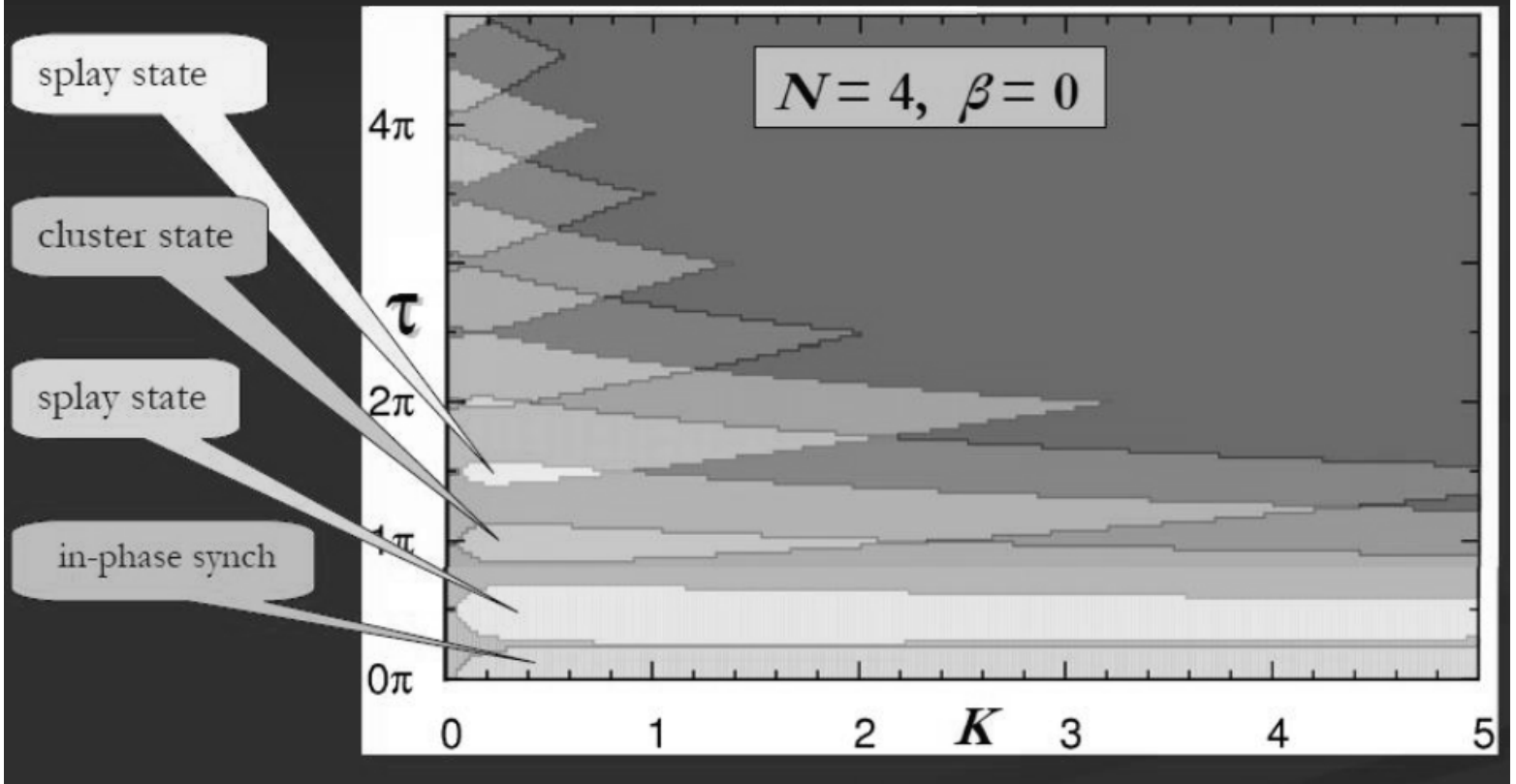
(ii) Kontrolle anderer Zustände:

$\lambda = 0.1, \gamma = 0, k, \tau$ variabel, $\beta = 0, N = 4$



Multistabilität folgender Zustände:





$\tau = 3\pi, K = 3$ (X im multistabilen Bereich)

ϕ_i relativ zu ϕ_1

Fazit:

Stabilisierung einer Dynamik

für geeignete Wahl von β