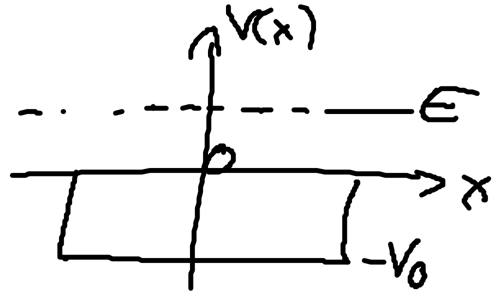
Wh:

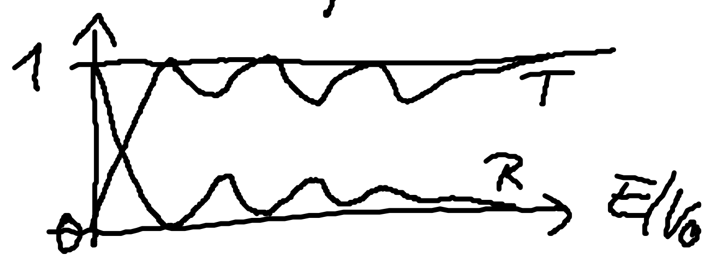


Streuzustände:

Annahme: Teilchen als einfallende Welle von links

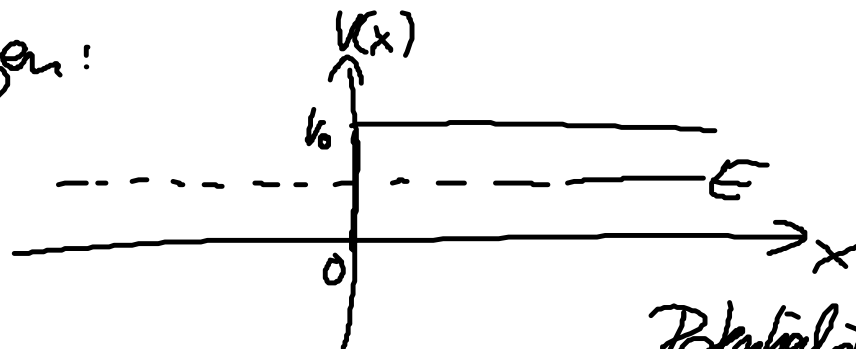
→ Teil dieser Welle wird reflektiert,
der Rest transmittiert

$$R = \left|\frac{j_r}{j_0}\right| \quad , T = \left|\frac{j_d}{j_0}\right| \quad , R+T=1$$



II.7.5. Tunneleffekt

Vorüberlegungen:



Potentialstufe

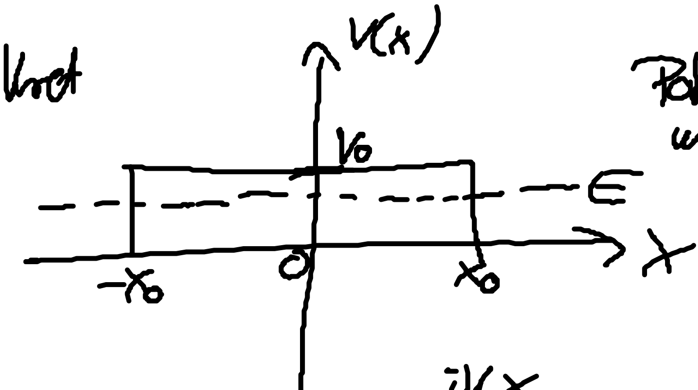
man findet: Die ~~Au~~ Aufenthalts- → Übung
wahrscheinlichkeit $|\varphi(x)|^2$
ist ungleich Null für $x > 0$ (und $0 < E < V_0$)

Konkret $|\varphi(x)| \sim e^{-2\kappa x}$
exponentiell abklingend

Das quantenmechanische Teilchen kann also bis zu einem gewissen Grad in das klassisch verbotene Gebiet eindringen!

Konsequenz:
Dünne Potentialwälle können „durchtunnelt" werden!

Konkret



Potentialwall mit Höhe V_0 und Breite $2x_0$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{ik_0x} + A e^{-ik_0x}, & x < -x_0, \quad k_0 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} \\ B_+ e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}, & |x| < x_0, \quad \lambda = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)} \\ C e^{ik_0x}, & x > x_0 \end{cases}$$

Stetigkeit von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$

Für die Transmissions – und Reflexionskoeffizienten ergibt sich

$$T(E) = \frac{4x^2}{4x^2 + (1+x^2)^2 \sinh^2(2\lambda x_0)}$$

mit $x = \frac{\lambda}{k_0} = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$

$$R(E) = \ldots = 1 - T(E)$$

Der „Tunnelstrom" (d.h. der Transmissionskoeffizient) ist ungleich Null!

Grenzwertbetrachtung für $T(E)$

sei $\lambda x_0 = \frac{1}{\hbar} x_0 \sqrt{2m(V_0 - E)} \gg 1$

d.h. sehr breiter Potentialwall (Breite $2x_0$)

oder sehr hoher Potentialwall im Vergleich zur Einfallsenergie damit $\sinh^2(2\lambda x_0) \approx \frac{1}{4} e^{4\lambda x_0}$

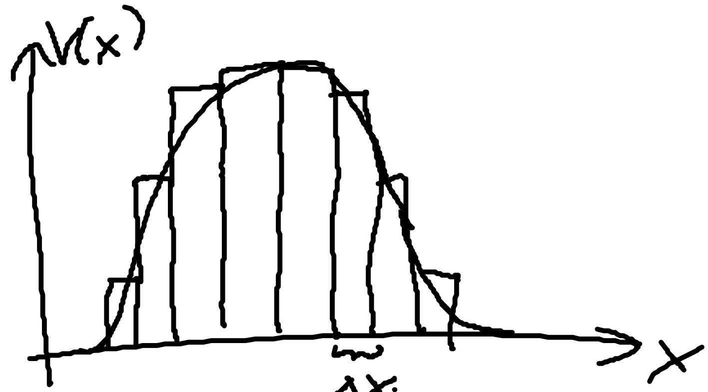
(wg. $\sinh y = \frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})$

$\approx \frac{1}{2} e^{y}$ für $y \gg 0$)

$$\Rightarrow T(E) \sim e^{-\frac{4}{\hbar} x_0 \sqrt{2m(V_0-E)}}$$

Die Transmission nimmt exponentiell ab mit der Breite des Walls und mit der Wurzel der effektiven Energiebarriere! V_0-E

Beschreibung realistischer Potentialwälle ?



$(i=1,\dots,N)$

ersetze das kontinuierliche Potential $V(x)$ durch eine Anzahl von N Rechtecken

$\Rightarrow$ N-faches Tunneln durch Rechteckwälle verschiedener Höhe

$$j_d^{(N)} = T_N\, j_d^{(N-1)} = \dots = T_N T_{N-1} T_{N-2} \cdots T_1\, j_0$$

von links einfallender Strom

~~D.h. T(E)~~

Insgesamt:

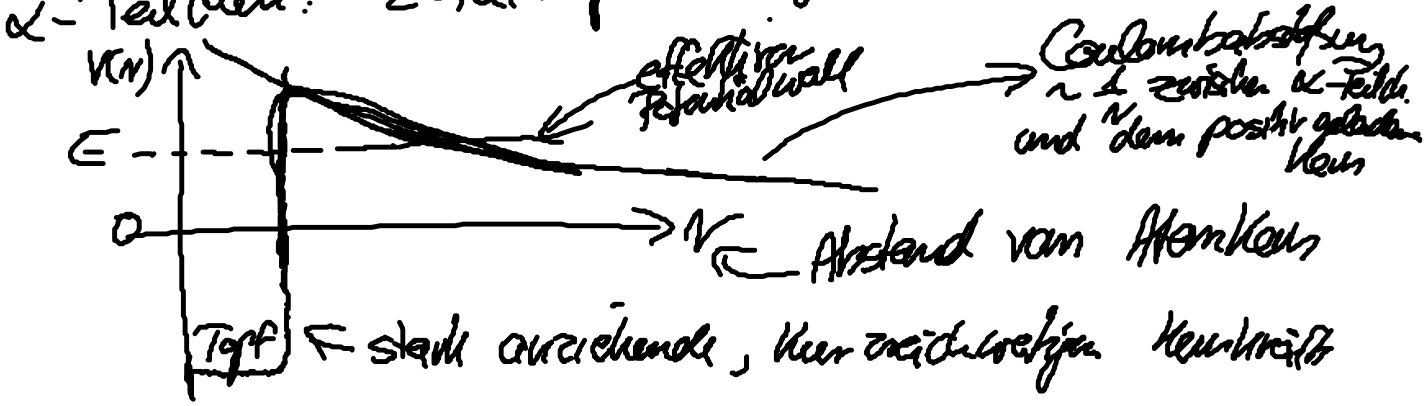
$$T(E) = \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V(x_i)-E)}\,\Delta x_i}$$

mit $V(x_i)$: Höhe des Rechtecks i

Δx_i: Breite " "

<u>Beispiel:</u> α-Radioaktivität

α-Teilchen: Z-fach positiv geladenes Teilchen



III. Formalisierung der Quantenmechanik

III.1. Zustandsvektoren im Hilbertraum

Vorbemerkungen

Fouriertransformation

$$\psi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\underline{p}\; \tilde{\varphi}(\underline{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

Wellenfunktion

beschreibt „Zustand" des Teilchens in der Ortsdarstellung
„$\underline{r}$-Darstellung"

$$\tilde{\varphi}(\underline{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\underline{r}\; \psi(\underline{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

Impulswellenfunktion

„Zustand in Impulsdarstellung"
$\underline{p}$-Darstellung

Betrachte im folgenden die Funktionen $\psi(\underline{r})$ und $\tilde{\varphi}(\underline{p})$ als Projektionen eines abstrakten Zustandsvektors $|\psi\rangle$ ← Dirac'sche „Ket"-Vektoren

auf die $\underline{r}$- bzw. $\underline{p}$-Darstellung.

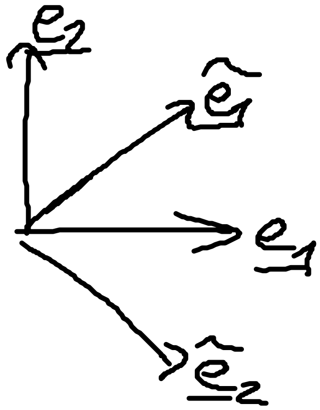
Letztere haben die Funktion einer Basis (des Hilbertraums)

Veranschaulichung:
betrachte gewöhnlichen 2-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^2$

Basis

$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$

$\{\underline{\tilde{e}}_1, \underline{\tilde{e}}_2\}$



z.B. $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\tilde{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\tilde{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Zerlegung eines Vektors $\underline{a}$ bzgl. dieser Basen

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^{2} a_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^{2} \tilde{a}_i \underline{\tilde{e}}_i$$

mit $a_i = \underline{a} \cdot \underline{e}_i \quad , \tilde{a}_i = \underline{a} \cdot \underline{\tilde{e}}_i$

Die Komponenten von $\underline{a}$ sind basisabhängig. Man erhält sie durch Projektion – d.h. durch ein Skalarprodukt

Neue Schreibweise:

$\underline{a} \longrightarrow |\underline{a}\rangle$

$\underline{e}_i \longrightarrow |\underline{e}_i\rangle$

$\underline{e}_i \cdot \underline{a} \longrightarrow \langle \underline{e}_i | \underline{a} \rangle = a_i$

„bracket" (Klammer)

$\langle \underline{e}_i |$ $\quad\quad$ $| \underline{a} \rangle$

„bra-Vektor" $\quad$ „ket-Vektor"

Dann gilt:

$$|\underline{a}\rangle = \sum_{i=1}^{2} |\underline{e}_i\rangle \underbrace{\langle \underline{e}_i|\underline{a}\rangle}_{a_i} = \sum_{i=1}^{2} |\hat{\underline{e}}_i\rangle \underbrace{\langle \hat{\underline{e}}_i|a\rangle}_{\tilde{a}_i}$$

Man sieht aus $|a\rangle = \sum_{i=1}^{2} |\underline{e}_i\rangle\langle\underline{e}_i|\underline{a}\rangle$

$$\sum_{i=1}^{2} |\underline{e}_i\rangle\langle\underline{e}_i| = \hat{1} \quad \text{Einheitsoperator}$$

$$\left(\hat{1}|\psi\rangle = |\psi\rangle \right)$$

$$\sum_{i=1}^{2} |\hat{\underline{e}}_i\rangle\langle\hat{\underline{e}}_i| = \hat{1}$$

„Vollständigkeitsrelationen", die zeigen, daß die $|\underline{e}_i\rangle$ bzw $|\hat{\underline{e}}_i\rangle$ den Raum vollständig aufspannen

Übertragung der neuen Notation auf die Orts- und Impulsdarstellung in der Quantenmechanik?

$\psi(\underline{r}) = \langle \underline{r} | \psi \rangle$

$\tilde{\psi}(\underline{p}) = \langle \underline{p} | \psi \rangle$

mit $|\psi\rangle$ abstrakter Zustandsvektor

Projektion von $|\psi\rangle$ auf die jeweilige Basis

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ Hilbertraum

$\Longleftrightarrow$ Raum, in dem die $|\psi\rangle$ „leben"

Vollständigkeitsrelationen für die $\underline{r}$ – bzw. und die $\underline{p}$ – Basis.

$$\int d\underline{r}\ |\underline{r}\rangle\langle\underline{r}| = \hat{1}$$

$$\int d\underline{p}\ |\underline{p}\rangle\langle\underline{p}| = \hat{1}$$

(Vektor im $\mathbb{R}^2$
$\sum_{i=1}^{2} |e_i\rangle\langle e_i| = \hat{1}$)

Die Anwesenheit der Integrale (anstatt von Summen) zeigt, daß die $\underline{r}$ – und $\underline{p}$ – Basis „kontinuierliche" Basen sind

$$\boxed{\sum\!\!\!\!\!\!\int |c\rangle\langle c| = \hat{1}}$$

Mit diesen Relationen kann man z.B. schreiben (Zerlegung nach einer Basis)

$$|\psi\rangle = \underbrace{\hat{1}|\psi\rangle}_{\text{Einschieben einer Eins}} = \int d\underline{r}\ |\underline{r}\rangle\langle\underline{r}|\psi\rangle = \int d\underline{r}\ |\underline{r}\rangle\, \psi(\underline{r})$$

analog

$$|\psi\rangle = \hat{1}\,|\psi\rangle$$

$$= \int d\underline{p}\ |\underline{p}\rangle\langle\underline{p}|\psi\rangle$$

$$= \int d\underline{p}\ |\underline{p}\rangle\ \tilde{\psi}(\underline{p})$$

<u>Basiswechsel</u> (von Orts- in die Impulsdarstellung)

Im gewöhnlichen Raum $\mathbb{R}^2$

$$a_j = \underline{e}_j \cdot \underline{a} = \underline{e}_j \cdot \sum_{i=1}^{2} \tilde{\underline{e}}_i\,\tilde{a}_i = \sum_{i=1}^{2} (\underline{e}_j \cdot \tilde{\underline{e}}_i)\,\tilde{a}_i$$

$$\psi(\underline{r}) = \langle\underline{r}|\psi\rangle = \underbrace{\langle\underline{r}|\hat{1}\psi\rangle}_{\text{Einschieben einer Eins}} = \langle\underline{r}|\underbrace{\int d\underline{p}\,|\underline{p}\rangle\langle\underline{p}|}_{\hat{1}}\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \psi(\underline{r}) = \langle\underline{r}|\psi\rangle$$

$$= \int d\underline{p}\ \langle\underline{r}|\underline{p}\rangle\langle\underline{p}|\psi\rangle$$

$$= \int d\underline{p}\ \langle\underline{r}|\underline{p}\rangle\ \tilde{\psi}(\underline{p}) \qquad (*)$$

Vergleiche dies mit dem früher hergeleiteten Zusammenhang:

$$\psi(\underline{r}) \overset{!}{=} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\underline{p}\ e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}\ \tilde{\psi}(\underline{p})$$

$$\Rightarrow \langle \underline{r} | p \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i/\hbar\, p \cdot \underline{r}}$$ ebene Welle!

Skalarprodukt der Vektoren zwei verschiedener Basen des Hilbertraumes!

analog

$$\tilde{\varphi}(p) = \langle p | \psi \rangle = \langle p | \hat{1}\, \psi \rangle$$

$$= \langle p | \int d\underline{r}\, |\underline{r}\rangle \langle \underline{r} | \psi \rangle$$

$$= \int d\underline{r}\, \langle p | \underline{r} \rangle\, \psi(\underline{r}) \quad (**)$$

Vergleich mit $\tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\underline{r}\, e^{-i/\hbar\, p \cdot \underline{r}}\, \psi(\underline{r})$

$$\Rightarrow \langle p | \underline{r} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i/\hbar\, p \cdot \underline{r}}$$

$$= \langle \underline{r} | p \rangle^*$$

II.2. Axiome des Hilbertraums $\mathcal{H}$

i) $\mathcal{H}$ ist ein linearer Vektorraum

Bedeutung: $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ Vektoren in $\mathcal{H}$

$\Rightarrow |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ ist auch Element von $\mathcal{H}$

$$\underbrace{\lambda_1 |\psi_1\rangle}_{\substack{\text{Vektor „parallel“} \\ \text{zu } |\psi_1\rangle}} + \lambda_2 |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$$